Épreuve académique
Mathématiques
Session 2023
Éléments de correction

Exercice 1 A gauche ou à droite ?
à traiter par tous les candidats

<u>Partie 1</u> : où l'on parle de *D*, *H*, *G*

1. $\frac{4}{5}HD = \frac{5}{1}$ et $\frac{1}{3}DG = \frac{4}{7}$

2. $\frac{13}{5}HHHHH = \frac{1}{1} = 1$

3. $\frac{1}{1}GGGGGG = \frac{1}{7}$ et $\frac{1}{1}DDDDDD = \frac{7}{1}$ d'où $\frac{1}{1}GG \dots G = \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{1}DD \dots D = \frac{n+1}{1}$

4. Comme $a > 0$ et $b > 0$, $a + b > a$ donc $\frac{a}{a+b} < 1$ c'est-à-dire $\frac{a}{b}G < 1$. De même pour $\frac{a}{b}D > 1$.
5. On suppose que $\frac{a}{b}$ est irréductible.
   Par l'absurde, si on suppose que $\frac{a}{a+b}$ n'est pas irréductible. Il existe k > 1 entier tel que $a = ka'$ et $a + b = kc$. On a donc $b = (c - a')k$ et donc b est divisible par k ainsi que a d'où $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible ce qui est contradictoire.

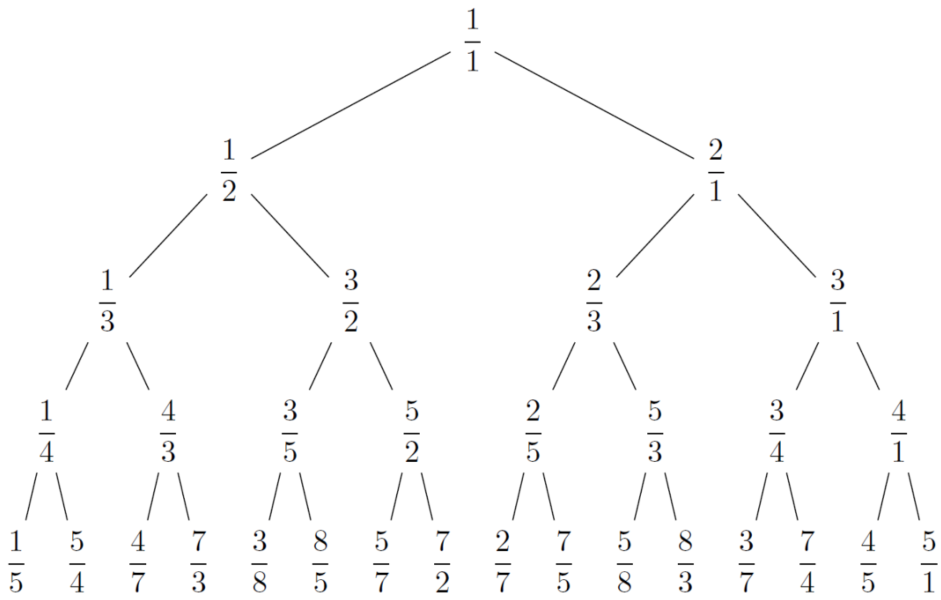
Pour la suite, on admettra que si $\frac{a}{b}$ est irréductible alors $\frac{a}{b}D$ et $\frac{a}{b}H$ sont aussi irréductibles.

6. a) $\frac{a}{b}DH = \frac{a}{b}GH = \frac{a}{b}$ (c'est l'identité).
   b) $\frac{7}{17}$GHDGHDHHGDDHGGHHHDGH $= \frac{7}{17}GD = \frac{7}{24}D = \frac{31}{24}$

7. on obtient $\frac{a}{b}GG \dots G = \frac{a}{na+b}$ et $\frac{a}{b}DD \dots D = \frac{a+nb}{b}$

Partie 2 : où l'on descend d'un arbre

1.



2. On remonte d'un cran dans l'arbre en appliquant H (question 6a).

3. Il suffit de partir de $\frac{21}{8}$ et d'effectuer « le plus grand moins le plus petit » au numérateur ou au dénominateur jusqu'à obtention de $\frac{1}{1}$ puis de retrouver les transformations associées dans le bon sens.

$$\frac{21}{8} = \frac{13}{8}D = \frac{5}{8}DD = \frac{5}{3}GDD = \frac{2}{3}DGDD = \frac{2}{1}GDGDD = \frac{1}{1}DGDGDD$$

4. **Présence dans l'arbre** : Partant d'une fraction irréductible quelconque, l'idée est d'appliquer H jusqu'à aboutir à $\frac{1}{1}$. Cela revient à appliquer l'algorithme d'Euclide à deux entiers premiers entre eux. Pour la justification, on acceptera une explication (même peu formelle) que le processus s'arrête. En effet, le numérateur et le dénominateur devenant de plus en plus petits, mais jamais nuls (car si la fraction n'est pas $\frac{1}{1}$, $a \neq b$ car les fractions obtenues sont toutes irréductibles), on aboutira ainsi nécessairement à la fraction $\frac{1}{1}$.

   Unicité dans l'arbre : Supposons que $\frac{a}{b}$ figure deux fois dans l'arbre. Alors leur père (commun) figure aussi deux fois, etc et donc $\frac{1}{1}$ figure aussi deux fois, ce qui est absurde ! En effet, en appliquant D et G, la somme « numérateur + dénominateur » augmente strictement donc $\frac{1}{1}$ ne peut apparaître deux fois.

<u>Partie 3</u> : où l'on atteint le millésime

1. Notons k la ligne où figure la fraction de numéro n ($\frac{1}{1}$ étant à la ligne 0).
   On peut donc écrire $n = 2^k + p$ (avec p entier tel que $0 \leq p < 2^k$)
   Pour atteindre le fils gauche de la fraction de numéro n il faut avancer de
   - $2^k - p + 1$ rangs pour terminer la ligne k.
   - $2(p-1) + 1 = 2p - 1$ dans la ligne k+1.

   Au total, on a donc avancé de $(2^k - p + 1) + (2p - 1) = 2^k + p = n$
   Donc le rang du fils gauche est $n + n = 2n$ et donc celui du fils droit est bien $2n + 1$

2. La fraction numéro 256 est $\frac{1}{9}$
   La fraction numéro 1023 est $\frac{10}{1}$

3. Le fraction $\frac{2022}{1}$ a pour rang $2^{2022} - 1$
   Son fils gauche est la fraction $\frac{2022}{2023}$ dont le rang est $2 \times (2^{2022} - 1) = 2^{2023} - 2$

4. La fraction numéro 2023 est $\frac{45}{13}$

Exercice 2 (Les délices)
à traiter par les candidats de la voie générale qui ont suivi la spécialité « mathématiques »

Partie 1

1. Oui

2.
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$
$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 + 16 + 17$$

Partie 2

1.
$$25 + 26 + 27 + \ldots + (25 + p - 1) = (25 + p) + (25 + p + 1) + \ldots + (25 + p + n - 1)$$
$$25 + 26 + 27 + \ldots + (25 + p - 1) = 25p + 1 + 2 + \ldots + (p - 1) = 25p + \frac{p(p-1)}{2}$$

Et :
$$(25 + p) + (25 + p + 1) + \ldots + (25 + p + n - 1) = 25(n + p) + 1 + 2 + \ldots + (n - 1)$$
$$= 25(n + p) + \frac{n(n-1)}{2}$$

L'équation s'écrit donc :
$$25p + \frac{p(p-1)}{2} = n(25 + p) + \frac{n(n-1)}{2}$$

En multipliant par 2 :
$$50(p - n) = np - p(p - 1) + n(n - 1)$$
$$50(p - n) = 2np + n^2 - p^2 + (p - n)$$

Donc on a bien :
$$49(p - n) = n^2 + 2np - p^2$$

2. Vérifier que $(p = 6\,; n = 5)$ est une solution de cette équation. A quel délice correspond-elle ?
Au délice :
$$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$

3. Vérifier que $(p = 21\,; n = 14)$ est une autre solution de l'équation. A quel délice correspond-elle ?
Au délice :
$$25 + 26 + \cdots + 45 = 46 + \cdots + 59$$

Partie 3

1. $(2x-1)(p-n) = n^2 + 2np - p^2$ avec $n = p-1$ conduit à :

$$(2x-1)\big(p-(p-1)\big) = (p-1)^2 + 2(p-1)p - p^2$$
$$2x - 1 = p^2 - 2p + 1 + 2p^2 - 2p - p^2 = 2p^2 - 4p + 1$$
$$2x = 2p^2 - 4p + 2 \text{ d'où } x = (p-1)^2$$

2.

Si $p = 6$ alors $x = 5^2 = 25$, on retrouve :

$$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$

Si $p = 7$ alors $x = 6^2 = 36$ d'où le délice :

$$36 + 37 + \ldots + 42 = 43 + \ldots + 48$$

Partie 4

1. Si $x = 10$ alors l'équation générale $(2x-1)(p-n) = n^2 + 2np - p^2$ devient en ajoutant n^2 :

$$19(p-n) + n^2 - 2np + p^2 = 2n^2$$
$$2n^2 = (p-n)^2 + 19(p-n)$$

2. Si $p - n = 19$ on obtient une solution en écrivant :

$$2 \times 19^2 = 19^2 + 19^2$$

Donc $n = 19$ et $p = 38$. Le délice est alors :

$$25 + \ldots + 62 = 63 + \ldots + 81$$

3. Avec $x = 100$ on obtient de même :

$$2n^2 = (p-n)^2 + 199(p-n)$$

D'où une solution avec $n = 199$ et $p - n = 199$ donc $p = 398$. D'où le délice :

$$100 + \ldots + 497 = 498 + \ldots + 696$$

Partie 5

1. Si $n = 3$ alors $(2x-1)(p-n) = n^2 + 2np - p^2$ s'écrit :

$$(2x-1)(p-3) = 9 + 6p - p^2$$
$$p^2 - 6p - 9 + 2px - 6x - p + 3 = 0$$
$$p^2 + (2x-7)p + (-6x-6) = 0$$

2. Si $x = 2$ cette équation devient $p^2 - 3p - 18 = 0$ qui a pour solution positive $p = 6$. D'où le délice :

$$2 + \ldots + 7 = 8 + 9 + 10$$

3. $\Delta = (2x-1)^2 + 72$

4.a. $(X+1)^2 - X^2 = 2X + 1 > 72$ si $X \geq 36$.

4.b. Evident

5. $(3\,;9)$; $(7\,;11)$; $(17\,;19)$

6. **Le cas $n = 3$: solutions**

$2x-1$	x	délices
3	2	$2+3+4+5+6+7 = 8+9+10$
7	4	$4+5+6+7+8+9 = 10+11+12$
17	9	$9+10+11+12 = 13+14+15$

Partie 6 (bonus)

$$n = \frac{1}{2}p \text{ conduit à } n = 2x - 1 \quad et \quad p = 4x - 2$$

$$n = p - 2 \text{ conduit à } x = \frac{n^2-1}{2}$$

Exercice 3 (Nombres épatants)
à traiter par les candidats de la voie générale qui n'ont pas suivi la spécialité « mathématiques » et par les candidats de la voie technologique

Partie 1 - Nombres épatants et opérations

1. **a.** On a $n_1 + n_2 = 1 + 3\varepsilon + 4 - \varepsilon = 5 + 2\varepsilon$

$$n_1 - n_2 = 1 + 3\varepsilon - (4 - \varepsilon) = 1 + 3\varepsilon - 4 + \varepsilon = -3 + 4\varepsilon$$

b. On a $n_1 n_2 = (1 + 3\varepsilon)(4 - \varepsilon) = 4 - \varepsilon + 12\varepsilon - \varepsilon^2 = 4 + 11\varepsilon$

2.

$$\begin{aligned} n_1 n_2 = (a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) &= ac + ad\varepsilon + bc\varepsilon + bd\varepsilon^2 \\ &= ac + (ad + bc)\varepsilon \end{aligned}$$

Il s'agit d'un nombre épatant car il est de la forme $A + B\varepsilon$ avec $A = ac$ et $B = ad + bc$.

3. **a.** On a $\tilde{\tilde{n}} = (\widetilde{a - b\varepsilon}) = (a + \widetilde{(-b)\varepsilon}) = a - (-b)\varepsilon = a + b\varepsilon = n.$

b. $(3 + 4\varepsilon)(3 - 4\varepsilon) = 9.$

c. On a $n\tilde{n} = (a + b\varepsilon)(a - b\varepsilon) = a^2 - (b\varepsilon)^2 = a^2 - b^2\varepsilon^2 = a^2 \in \mathbb{R}_+$

Partie 2 - Nombres épatants et inverse

1. $(2 + 3\varepsilon)(0{,}5 - 0{,}75\varepsilon) = 1 - 1{,}5\varepsilon + 1{,}5\varepsilon - 2{,}25\varepsilon^2 = 1$. Ces deux nombres épatants sont donc bien inverses l'un de l'autre.

2. On a

$$\begin{aligned} (4 + 2\varepsilon)(a + b\varepsilon) = 1 &\Leftrightarrow 4a + 4b\varepsilon + 2a\varepsilon + 2b\varepsilon^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4a + (4b + 2a)\varepsilon = 1 \\ &\Leftrightarrow 4a = 1 \text{ et } (4b + 2a) = 0 \end{aligned}$$

on obtient donc $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{8}$.

Désignons par $x + y\varepsilon$ l'inverse de 7ε. On obtient alors

$$\begin{aligned} 7\varepsilon(x + y\varepsilon) = 1 &\Leftrightarrow 7x\varepsilon + 7y\varepsilon^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 7x\varepsilon = 1 \end{aligned}$$

ce qui est impossible car 1 est une partie réelle et $7x\varepsilon$ une partie volatile.

Partie 3 - Nombres épatants et diviseurs de 0

1.

a. On a

$$\begin{aligned}(3+\varepsilon)(a+b\varepsilon)=0 &\Leftrightarrow 3a+3b\varepsilon+a\varepsilon+b\varepsilon^2=0\\ &\Leftrightarrow 3a+(3b+a)\varepsilon=0\\ &\Leftrightarrow 3a=0 \text{ et } 3b+a=0\end{aligned}$$

impliquant $a=0$ et $b=0$.

b. D'après le calcul fait à la question 3 de la partie 2, $7\varepsilon(a+b\varepsilon)=7a\varepsilon$. Ce produit vaut 0 si, et seulement si $a=0$. Aucune condition particulière sur b, c'est un réel quelconque.

2.

a. De par la question 1) b), le résultat est évident car $0=0+0\varepsilon\in\mathbb{R}[\varepsilon]$).

b. $ac=0$ cela implique que l'on ait $a=0$ ou $c=0$ (par la première équation). On suppose alors $a=0$. Dès lors, $ad+bc=0\Leftrightarrow bc=0\Leftrightarrow b=0$ (impossible car sinon $n_1=0$ mais il est supposé non nul par hypothèse), soit $c=0$, qui reste possible. Donc on a bien $c=0$.

c. Les nombres épatants non nuls dont le produit vaut 0 sont ceux de la forme $b\varepsilon$. En effet, si $n_1=b\varepsilon$ et $n_2=d\varepsilon$, $n_1n_2=b\varepsilon d\varepsilon=bd\varepsilon^2=0$.

Partie 4 - Nombres épatants et puissances –

1.

a. On a $(1+\varepsilon)^2=1+2\varepsilon+\varepsilon^2=1+2\varepsilon$;

$$(1+\varepsilon)^3=(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2=(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)=1+2\varepsilon+\varepsilon+2\varepsilon^2=1+3\varepsilon\ ;$$
$$(1+\varepsilon)^4=(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^3=(1+\varepsilon)(1+3\varepsilon)=1+3\varepsilon+\varepsilon+3\varepsilon^2=1+4\varepsilon.$$

b. En observant les résultats de la question précédente, on peut formuler l'hypothèse que, pour tout entier naturel n, $(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon$.

2. On a $(x+\varepsilon)^2=x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2=x^2+2x\varepsilon$ et

$$(x+\varepsilon)^3=(x+\varepsilon)(x+\varepsilon)^2=(x+\varepsilon)(x^2+2x\varepsilon)=x^3+2x^2\varepsilon+x^2\varepsilon+2x\varepsilon^2=x^3+3x^2\varepsilon$$

On peut alors conjecturer que, pour tout entier naturel n,

$$(x+\varepsilon)^n=x^n+nx^{n-1}\varepsilon$$

Partie 5 – Formules épatantes – 3 points

1. On suppose $f(x)=x^2$. Ainsi

$$f(x+\varepsilon)=(x+\varepsilon)^2=x^2+2x\varepsilon=f(x)+(2x)\varepsilon$$

ce qui implique, par identification, que $\dot{f}(x)=2x$.

2. En utilisant la conjecture de la question 2 de la partie 4, on a

$$f(x+\varepsilon)=(x+\varepsilon)^n=x^n+nx^{n-1}\varepsilon=f(x)+\dot{f}(x)\varepsilon$$

Impliquant que $\dot{f}(x)=nx^{n-1}$

3. On a :

$$\begin{aligned}u(x+\varepsilon)v(x+\varepsilon)&=(u(x)+\dot{u}(x)\varepsilon)(v(x)+\dot{v}(x)\varepsilon)\\ &=u(x)v(x)+u(x)\dot{v}(x)\varepsilon+\dot{u}(x)v(x)\varepsilon+\dot{u}(x)\dot{v}(x)\varepsilon^2\\ &=u(x)v(x)+\big(u(x)\dot{v}(x)+\dot{u}(x)v(x)\big)\varepsilon\end{aligned}$$

On a donc comme partie volatile $u(x)\dot{v}(x)+\dot{u}(x)v(x)$, ce qu'on peut résumer

$$\dot{(uv)}=u\dot{v}+\dot{u}v$$