Ressources pour le collège et le lycée

ministère éducation nationale

éduscol

Ressources pour le collège et
le lycée général et technologique

Mathématiques

Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée

février 2013

Sommaire

Introduction 2
Le calcul dans les programmes de l'école primaire et du collège 2
Le calcul dans les programmes du lycée général et technologique 3
1. Le calcul pour construire et consolider les apprentissages 4
1. Appréhender, construire et conceptualiser des objets mathématiques 4
2. Calcul et automatismes 4
3. Découvrir et comprendre une règle de calcul 5
4. L'apprentissage du calcul littéral 6
5. Les fonctions 7
2. Le calcul pour développer des compétences mathématiques 8
1. Calcul et raisonnement 8
2. Le sens et les contrôles 10
3. Le sens et la cohérence 10
4. La disponibilité des différents registres, la flexibilité entre ces registres 11
3. Quelques stratégies pédagogiques 13
1. Pratiquer le calcul mental, les activités à gestion mentale 13
2. Développer des images mentales 13
3. Anticiper et expliciter 14
4. Trouver la juste place du calcul instrumenté 14
4. Un exemple de mise en œuvre filée : introduction de la notion de racine carrée 16
Prérequis 16
Les premiers pas 16
Perfectionnement sur la définition 16
Réductions 17
Sens de certaines expressions littérales 17
Équation $x^2 = a$ 17
Racines carrées et opérations 17
Bibliographie 18

Introduction

Le calcul est omniprésent dans les pratiques mathématiques : il en est une composante essentielle à tous les niveaux, inséparable des raisonnements qui le guident comme de ceux qu'il outille. Or l'image du calcul véhiculée par la culture et l'enseignement est aujourd'hui dégradée, ce qui a des effets négatifs sur l'image même des mathématiques.

Par ailleurs, le développement des technologies informatiques a profondément modifié l'appréhension du calcul, tant au niveau des pratiques quotidiennes et sociales qu'à celui des pratiques scientifiques. La plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité, notamment dans l'enseignement obligatoire, sont aujourd'hui implémentés dans les calculatrices les plus simples, ce qui pose la question de la pertinence du maintien de leur enseignement. À l'opposé, le calcul pose des questions nouvelles liées notamment à la représentation informatique des objets mathématiques sur lesquels il porte (par exemple la représentation informatique des nombres) ou à la performance des algorithmes utilisés au-delà de leur seule effectivité…, autant de questions qui, auparavant, n'étaient pas des enjeux de l'enseignement. La puissance de calcul des nouveaux outils modifie aussi profondément l'économie du calcul et pose, dans des termes renouvelés, celle de la gestion des rapports entre le calcul et le raisonnement, en favorisant explorations, simulations, expérimentations.

Enfin, l'évolution même du champ mathématique déplace les équilibres traditionnels en matière de calcul. On peut penser par exemple à l'influence croissante des mathématiques discrètes ou des modélisations probabilistes, qui induisent de nouvelles formes de calcul dans les sciences mathématiques. Cette évolution oblige l'enseignement des mathématiques à questionner ses équilibres traditionnels.

Pour toutes ces raisons, l'enseignement des mathématiques se trouve, dans ses rapports au calcul, dans une phase de déstabilisation. On ne peut donc manquer de s'interroger aujourd'hui sur ce que peut être, sur ce que doit être, l'enseignement du calcul au collège et au lycée, à la fois dans ses contenus et dans ses formes, compte tenu des besoins culturels, scientifiques et sociaux auxquels il doit répondre. C'est à la réflexion sur ces questions que le présent document souhaite contribuer.

Dans un premier temps, nous précisons la place du calcul dans les programmes du collège et du lycée général et technologique, dont sont extraits les paragraphes écrits en italique.

Le calcul dans les programmes de l'école primaire et du collège

Le domaine « nombres et calcul » est l'un des quatre domaines du programme de mathématiques de l'école primaire et du collège. Décliné selon trois formes (mental, posé, instrumenté), l'apprentissage du calcul est un élément central de l'école du socle.

> L'enseignement du calcul doit associer étroitement la construction du sens des opérations et l'acquisition des diverses techniques opératoires, qui se confortent et se renforcent l'une l'autre.

À l'école primaire, l'entraînement quotidien au calcul mental (15 minutes) porte sur les quatre opérations. Il favorise l'appropriation des nombres et de leurs propriétés. Le calcul posé s'organise autour de la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations.

Dans le premier degré, le calcul instrumenté se limite principalement à l'utilisation raisonnée d'une calculatrice en fonction de la complexité des calculs auxquels sont confrontés les élèves. Au collège, la pratique du calcul instrumenté est enrichie par l'utilisation d'ordinateurs. Cependant, on peut lire dans les programmes :

> Il est néanmoins très important de montrer aux élèves que, si le recours à la calculatrice peut se révéler nécessaire pour certains calculs complexes, il est d'autres situations dans lesquelles le calcul mental s'avère plus rapide et plus efficace.

De plus, la bonne exécution d'un calcul instrumenté requiert une véritable intelligence du calcul par la mise en œuvre d'une organisation réfléchie (conception de l'algorithme, priorité des opérations, priorité dans les calculs, contrôles de vraisemblance), que seule une pratique antérieure, mentale ou « à la main », aura permis de développer.

Mais la mise en action de cette intelligence du calcul suppose qu'elle puisse prendre appui sur un répertoire minimal. Ce répertoire dépend des objectifs de formation (connaissances des tables de multiplication, des carrés, des puissances de 2 au collège). C'est cet acquis mental initial qui permettra la germination de concepts nouveaux, comme par exemple l'utilisation d'une inconnue littérale.

Le développement des compétences mathématiques dans l'école du socle passe par la résolution de problèmes, qui imbrique fortement raisonnement et pratiques calculatoires :

> La résolution de problèmes liés à la vie courante permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement.

Le calcul dans les programmes du lycée général et technologique

Les programmes de lycée positionnent le calcul en tant qu'outil au service de la pratique d'une démarche scientifique, à travers la mise en œuvre d'activités de recherche et de résolution de problèmes :

> « Le calcul est un outil essentiel pour la pratique des mathématiques dans la résolution de problèmes. Il est important en classe de seconde de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul mental, du calcul numérique et du calcul littéral. L'utilisation d'outils logiciels de calcul – sur calculatrice ou sur ordinateur – contribue à cet entraînement. »
>
> *extrait du programme de seconde*
>
> « L'utilisation de logiciels de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.
>
> En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements. »
>
> *extrait du programme de 1re S*

S'en tenir à cette vision restrictive de l'activité de calcul mènerait inexorablement à occulter la diversité des formes d'intelligence qu'elle nécessite. Qu'il s'agisse de choisir les représentations des objets les mieux adaptées aux calculs à mener, d'organiser et de gérer ces calculs dès qu'ils ne relèvent pas de la simple routine, d'en anticiper, d'interpréter ou de contrôler les résultats, l'intelligence et le raisonnement sont à l'œuvre dans nombre d'activités de calcul au niveau du lycée, même s'ils sont invisibles dans les traces ostensives de ce dernier.

On se saurait non plus dénier le rôle essentiel que joue le calcul dans la conceptualisation des objets mathématiques qu'il engage ou des méthodes algorithmiques qu'il préfigure.

Il apparaît donc clairement au niveau du lycée que l'intérêt du calcul ne se limite pas à la production de résultats, mais porte aussi sur son potentiel épistémique au service de la compréhension des mathématiques.

Afin d'alimenter la réflexion des professeurs sur la façon dont l'enseignement des mathématiques peut se situer aujourd'hui par rapport à cette question si controversée du calcul, plusieurs documents sont consultables sur le site éduscol :

- **Niveau collège :**
  - « Les nombres au collège »
  - « Du numérique au littéral »
  - « Le calcul numérique au collège »
- **Niveau lycée :**
  - Pour la classe de seconde : « Fonctions »
  - Pour les classes de premières générales et technologiques : « Analyse en première générale S, ES, L »

1. Le calcul pour construire et consolider les apprentissages

1. Appréhender, construire et conceptualiser des objets mathématiques

Le calcul, sous forme exacte ou approchée, est intrinsèquement lié à la construction des concepts mathématiques et des théories. La connaissance des nombres, les propriétés des opérations, la proportionnalité, la compréhension des suites numériques et de certaines notions d'analyse, en sont quelques exemples. La pratique du calcul commence sur des objets encore mal formalisés. Son rôle est décisif pour familiariser les élèves avec ces objets, leur manipulation permettant ainsi d'en construire une représentation efficace. C'est particulièrement vrai lorsque la définition de ces objets n'est pas étudiée parce qu'elle n'est pas accessible à l'élève ou lorsqu'elle ne suffit pas à leur utilisation.

C'est le cas des nombres et celui de la construction progressive des ensembles de nombres, c'est le cas des vecteurs, c'est aussi le cas des fonctions : dérivation, calculs de limites.

Le calcul permet également de mettre en place de façon progressive et implicite les structures qui régissent les objets sur lesquels il agit.

Une utilisation précoce ou mal pensée du calcul instrumenté peut priver de cette familiarisation indispensable dans la construction des apprentissages.

Le calcul, sous forme algorithmique, donne aussi accès à certains objets définis de manière constructive, comme le PGCD de deux entiers à l'aide de l'algorithme d'Euclide ou de celui de différences, la racine carrée par approximations successives, etc.

2. Calcul et automatismes[1]

Le développement d'automatismes est l'une des clés dans l'apprentissage du calcul. Les automatismes permettent de choisir efficacement un type de calcul, d'anticiper, de piloter un calcul en fonction du but poursuivi, d'avoir une représentation pertinente des objets engagés dans un calcul, d'interpréter certaines étapes du calcul, etc. La construction d'automatismes s'appuie sur la mémorisation de répertoires adaptés à la spécificité de chaque type de calcul (calcul algébrique, calcul vectoriel), qui s'enrichissent au fil des apprentissages : répertoires de connaissances, de techniques, de stratégies, de situations.

Dans ces répertoires, on retrouve entre autres :

- les tables de multiplication ;
- les diverses écritures d'un même nombre ;
- les identités remarquables ;
- les lignes trigonométriques remarquables ;
- la reconnaissance et la manipulation de formes algébriques ;
- la reconnaissance de certaines fonctions dérivées (polynômes, fonctions « $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ », « $x \mapsto u(x)^{\alpha}$ » …) pour penser à certaines formes de solutions particulières d'équations différentielles ;
- etc. Voir [6] et [7].

[1] Le sens donné ici au mot « automatisme » est celui figurant dans le paragraphe 4.4 du préambule des programmes de collège de 2008 :

« ***La nécessité des mémorisations et des réflexes intellectuels.***

En mathématiques, les concepts, les connaissances et les méthodes s'élaborent et s'organisent progressivement à partir des savoirs antérieurs, pour former un ensemble structuré et cohérent.

Ainsi l'activité mathématique, centrée sur la résolution de problèmes, nécessite-t-elle de s'appuyer sur un corpus de connaissances et de méthodes, parfaitement assimilées et totalement disponibles.

En effet, pour être autonome dans la résolution d'un problème et donc être en capacité de prendre des initiatives, d'imaginer des pistes de solution et de s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes qui facilitent le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique tout en élargissant le champ des démarches susceptibles d'être engagées.

Ces nécessaires réflexes intellectuels s'acquièrent dans la durée sous la conduite du professeur. Ils se développent en mémorisant et en automatisant progressivement certaines procédures, certains raisonnements particulièrement utiles, fréquemment rencontrés et qui ont valeur de méthode. ***Toutefois un automatisme n'est pas un moyen pour comprendre plus vite ; il permet simplement d'aller plus vite lorsque l'on a compris. Si leur acquisition nécessite des exercices d'entraînement et mémorisation, référés à des tâches simples, ces exercices ne sauraient suffire. En effet, pour être disponibles, les automatismes doivent être entretenus et régulièrement sollicités dans des situations où ils font sens. »***

À titre d'exemple :

- Une bonne pratique automatique des différentes décompositions d'un entier (en produit de deux facteurs, en somme *polynomiale* de base dix) est un facteur de réussite pour résoudre un certain nombre de problèmes numériques, pour comprendre la problématique des nombres premiers ou celle de la décomposition en facteurs premiers, pour appréhender la notion de base.
- L'association automatique entre un pourcentage d'évolution et le coefficient multiplicateur associé permet de traiter rapidement les problèmes d'augmentations ou de baisses successives, mais aussi de déjouer la plupart des pièges relatifs aux pourcentages.
- L'automaticité dans la réduction d'expressions algébriques de base (telles que $1\times x=1x=x$, $2x-5x=-3x$, $a\times ab=a^2b$, …) est un facteur de réussite et de performance dans la conduite de calculs plus complexes.
- Etc.

Les automatismes calculatoires ne peuvent se construire si l'on adopte un usage trop précoce de la calculatrice en début d'apprentissage. Ils se construisent mal par l'usage exclusif de « gammes » de calculs répétitifs. Ceux-ci, employés à petite dose, peuvent momentanément les conforter, mais leur construction et leur ancrage irréversible demandent du temps dans la pratique des calculs réfléchis. La résolution de problèmes et le calcul mental vont dans ce sens.

Exemples :

- À l'école primaire, il est important de pratiquer la décomposition d'un entier en produit de deux facteurs assez longtemps, en vue d'aborder les tables de multiplications. Ainsi on peut décomposer 48 en rangeant 48 jetons de plusieurs façons par lignes comprenant le même nombre de jetons ; un peu plus tard, on peut décomposer mentalement 48 de toutes les façons possibles. Cela permet d'ancrer dans les esprits que 48 est dans la table du 6 et dans celle du 8.
- En 6^{e}, la résolution de petits problèmes avec des grandeurs permet de consolider et d'automatiser le sens des opérations, le recours aux ordres de grandeur.
- Au collège, on facilite la mémorisation des formules de calcul d'aires et de volumes, en contrôlant l'homogénéité des unités, mais aussi en observant l'effet sur le résultat d'une dimension qui double ou qui triple.
- En trigonométrie, le calcul mental réfléchi, s'appuyant sur l'image mentale du cercle trigonométrique, permet progressivement d'automatiser la connaissance des valeurs remarquables du sinus et de cosinus. Il en est de même avec les modules et arguments remarquables de certains nombres complexes, dans les séries S et STI2D.

3. Découvrir et comprendre une règle de calcul

La pratique détaillée de calculs numériques élémentaires amène à découvrir progressivement certaines propriétés, sans avoir à les parachuter. Cela demande une anticipation pédagogique permettant un échelonnement des apprentissages.

Exemples :

- Le calcul mental de $12\times 7=10\times 7+2\times 7$, …, ou de $19\times 13=20\times 13-1\times 13$ peut amener les « formules » : $k\times(a+b)=k\times a+k\times b$ et $k\times(a-b)=k\times a-k\times b$ en $5^{\text{ème}}$.
- Le calcul (sans poser l'opération) de $24\times 37=(20+4)(30+7)$ montre que le résultat s'obtient en ajoutant 28 unités, $(4\times 3+2\times 7)$ dizaines, et 2×3 centaines. Une certaine pratique de ce genre de calcul peut amener la technique de double distributivité en $4^{\text{ème}}$. Bien sûr, des découpages géométriques peuvent aussi être utilisés.
- Le calcul (sans poser l'opération) de 31^2, de 29^2, ou de 59×61 peut être profitablement envisagé longtemps avant d'introduire les trois produits remarquables.
- Des calculs tels que $2^3\times 2^5$ ou $\dfrac{2^7}{2^3}$ doivent être assez longuement pratiqués en utilisant les expressions développées des puissances avant d'institutionnaliser les propriétés correspondantes. L'application de ces propriétés peut raisonnablement demeurer au stade du calcul raisonné au collège, la phase automatique étant trop souvent dépourvue de sens.

4. L'apprentissage du calcul littéral

Avec l'avancée dans la scolarité, le calcul va intégrer de nouvelles formes et de nouveaux objets. Au collège, le calcul littéral doit prendre place dans les moyens d'expression et de résolution de problèmes disponibles pour l'élève. En arithmétique, l'élève progressait du connu vers l'inconnu, en produisant pas à pas des résultats intermédiaires. En algèbre, il s'agit pour lui d'établir des relations entre connu et inconnu, puis de calculer sur ces relations jusqu'à obtenir le résultat cherché. Il y a là un renversement de pensée dont l'enseignement sous-estime souvent la difficulté, en pensant qu'il suffit d'en montrer le fonctionnement à l'élève dans quelques cas pour que sa nécessité s'impose.

Source : [2]

Voici quelques situations permettant de préparer le terrain pour introduire le calcul littéral.

Exemple 1

Considérons l'algorithme de calcul suivant (6^e, 5^e) :

- choisir un nombre ;
- le multiplier par 2 ;
- ajouter 5 au résultat.

Que donne cet algorithme si le nombre de départ est 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? …. 100 ?

En classe, après quelques calculs à la main, le professeur peut implémenter les nombres sur un tableur et introduire des formules de calcul. La formule $\boxed{= 2 * \text{A1} + 5}$ peut être facilement exploitée pour introduire une lettre à la place de « A1 ».

Exemple 2

1. Que montrent les écritures suivantes du nombre 36 :

$$36 = 2 \times 18 \;;\quad 36 = 2^2 \times 3^2 \;;\quad 36 = 17 + 19 \;;\quad 36 = 3 \times 12 \quad ?$$

2. Donner une écriture du nombre 27 montrant que :
   27 est un nombre impair ; 27 est un multiple de 3 ; 27 est la somme de deux entiers consécutifs.
3. Que peut-on dire d'un nombre entier qui s'écrit sous la forme :

$$2n \;;\quad 2k+1 \;;\quad n^2 + k^2 \;;\quad 7k \quad (n \text{ et } k \text{ étant des entiers}) \;?$$

Exemple 3 (en introduction au calcul littéral en 4^e)

Voici une suite de six nombres entiers : 2, 3, 5, 8, 13, 21.

1. Comment cette suite a-t-elle été construite ?
   Construire d'autres suites de 6 nombres suivant le même principe et, pour chacune d'elles, calculer la somme des six nombres et la diviser par 4.
   Qu'observe-t-on ?
2. Formuler une conjecture et la vérifier sur une autre suite du même type.
3. Ce résultat est-il toujours vrai ? Prouver la réponse.

Prolongements possibles :

4. La somme des six nombres est 268, le sixième nombre est 108.
   Quels sont les cinq premiers nombres ?
5. La somme des six nombres est 484 et le premier nombre est 23. Trouver les suivants.
6. Le troisième nombre est 19, le sixième est 81. Trouver les quatre nombres manquants.

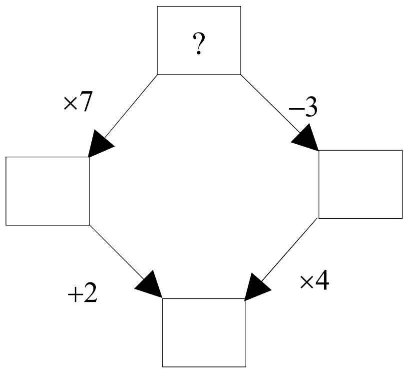
Voici un scénario de mise en œuvre possible :

- Dans un premier temps, les élèves construisent des suites ; mise en commun et validation du procédé de construction.
- Différents essais mènent à la formulation de la conjecture : le quart de la somme semble être toujours égal au cinquième nombre de la suite.
- Pour passer à la généralisation, les élèves utilisent des formulations diverses, en remplaçant par exemple les nombres par des mots : 1er nombre, 2^{e} nombre, 3^{e} nombre… ; ils sont ensuite amenés à utiliser le lien entre ces nombres : 1er nombre ; 2^{e} nombre ; 1er nombre + 2^{e} nombre ; 2^{e} nombre + 3^{e} nombre, etc. La lourdeur de l'écriture de ces nombres puis du calcul du quart de la somme incite à simplifier les écritures, d'où l'idée de codage…

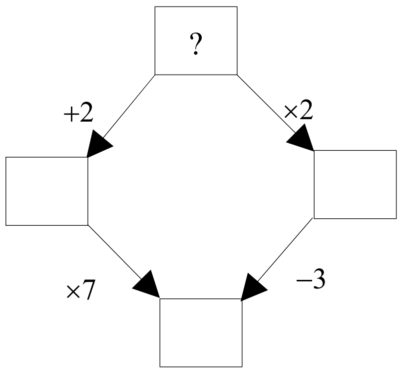
Exemple 4 (classe de 4^{e}, avant d'introduire les équations)

Dans les deux situations qui suivent, les deux chemins mènent au même résultat. De quel nombre est-on parti ?

a)



b)



Voici un scénario de mise en œuvre possible :

1. Essais successifs, puis résolution au tableur par approches successives ; la solution est décimale et peut donc être obtenue par cette procédure (on ne demande pas de donner toutes les solutions).
2. La procédure précédente n'aboutit pas car la solution est rationnelle non décimale. Cette situation motive donc l'introduction de la traduction algébrique sous la forme d'une équation. Les propriétés permettant de résoudre l'équation sont ensuite introduites et démontrées pour permettre de conclure (réinvestissement des acquis de calcul littéral).

5. Les fonctions

Le calcul en Analyse se veut plus qu'un calcul fonctionnel formel. Deux prises de conscience sont amorcées dès le lycée :

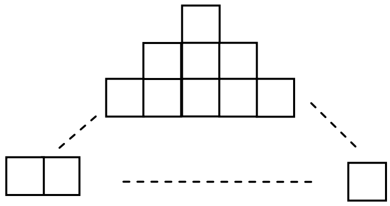
• comprendre que le calcul en analyse se différencie du calcul algébrique antérieur, par le jeu qu'il instaure en « local » et « global ». (Avec l'entrée dans le champ de l'Analyse, le rapport à la linéarité se modifie substantiellement : la linéarité, perçue de façon locale et non plus seulement globale, devient un élément clef de la conceptualisation et du calcul. Elle est à la base des concepts de vitesse et de dérivée.) ;

• comprendre que c'est un calcul qui intègre de façon fondamentale la notion d'ordre de grandeur. (Même si le calcul s'appuie sur des techniques numériques et algébriques familières, il doit en effet apprendre à intégrer une différenciation des termes suivant les ordres de grandeur. Tout n'est plus dans une expression algébrique au même niveau, il faut apprendre à reconnaître les termes dominants.)

Source : [2]

Le calcul numérique permet d'appréhender plusieurs aspects dans l'apprentissage des fonctions et, plus généralement, des notions d'Analyse.

- Dans les premiers pas, en troisième et en seconde, les algorithmes de calcul mettent en scène les fonctions avant d'introduire tout formalisme algébrique. De même les tableaux de nombres, surtout avec le calcul automatique permis par les tableurs, sont un outil privilégié pour amener la notion de variable. On passe du nombre à la cellule, puis de la cellule à la lettre.
- Une investigation numérique permet de préparer le terrain pour introduire le formalisme des suites, et ce de façon très précoce. Ainsi par exemple, l'étude d'un empilement de carrés permet d'amener les principales notions sur les suites arithmétiques (définition, calcul du terme général, de la somme des premiers termes), en posant les *bonnes* questions.



- L'examen de tables numériques donne du sens à l'introduction des fonctions « racine carrée », « sinus », « cosinus », « logarithme », car le tableau de valeurs permet une appréhension dynamique de ces fonctions, et donne une idée intuitive de certaines de leurs propriétés globales (sens de variation), locales ou asymptotiques.
- Les valeurs approchées décimales sont très convaincantes quant à l'existence et à l'appréhension des réels non décimaux comme des « nombres » à part entière.
- L'aspect numérique joue un rôle important dans l'appréhension du concept de limite ou encore celui de dérivée.
- La méthode d'Euler est particulièrement intéressante pour introduire la fonction exponentielle, pour donner des valeurs approchées du nombre e. Elle donne du sens à des solutions d'équations différentielles, qu'elles soient ou non exprimables à l'aide des fonctions usuelles.
- Les méthodes de calcul approché d'intégrales permettent de mieux comprendre la définition de l'intégrale d'une fonction continue positive, elles donnent du sens aux intégrales de fonctions n'ayant pas de primitive connue.

2. Le calcul pour développer des compétences mathématiques

1. Calcul et raisonnement

Nous sommes loin désormais d'une conception caricaturale des mathématiques qui a pu opposer, autant dans les démarches de pensée que dans les méthodes d'apprentissage, le calcul au raisonnement. Cette dépréciation du calcul est pourtant toujours prégnante dans la société, sans doute parce qu'elle a été longtemps véhiculée dans l'enseignement, parfois de manière inconsciente.

<u>La place de choix du calcul algébrique</u>

Le calcul algébrique, quand il est introduit, constitue un nouvel espace où va se déployer le raisonnement, en permettant notamment d'expliquer, de généraliser des constats numériques. C'est un outil de généralisation et de preuve, précurseur de l'analyse fonctionnelle.

Les rapports entre calcul algébrique et raisonnement vont être en jeu dès lors que le calcul algébrique ne se limitera pas à l'exécution d'algorithmes familiers, dans la résolution de tâches routinières ou étroitement balisées, donc dès que la conduite du calcul va nécessiter une intelligence du calcul. L'enseignement doit prendre en charge le développement des moyens de cette intelligence du calcul nécessaire à un calcul raisonné, des moyens qui sont en partie communs et en partie propres à chaque type de calcul. Il a d'ailleurs peut-être mieux les moyens de le faire aujourd'hui que les équilibres entre exécution, pilotage et contrôle du calcul se trouvent déplacés par l'évolution technologique. Encore faut-il bien sûr intégrer cette technologie de façon adéquate dans l'enseignement, en construisant des situations où pilotage et contrôle soient nécessaires.

Voici quelques exemples montrant que calcul et raisonnement ne sont ni hiérarchisés ni même dissociés dans l'activité mathématique, mais qu'ils sont fortement imbriqués.

Exemple 1 (6^e)

Je voudrais acheter six cahiers à 1,85 €, un classeur à 4,05 € et une calculatrice à 13,90 € mais je n'ai que 30 €. Aurai-je assez d'argent ?

Plusieurs stratégies raisonnées peuvent être mises en œuvre et confrontées l'une à l'autre : ordres de grandeur, calculs effectifs où le sens des opérations joue un rôle important.

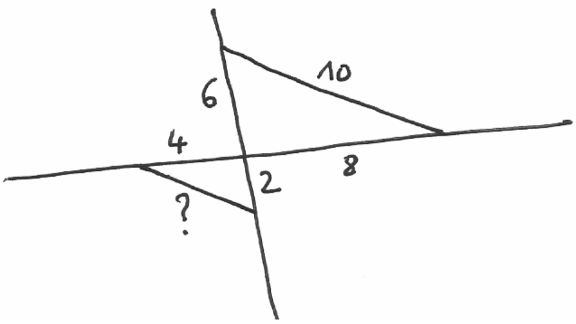
Exemple 2

L'utilisation d'un exemple générique, en parallèle aux écritures littérales, permet de mieux comprendre une démonstration. L'exemple suivant détaille le cas du produit de deux quotients.

$\frac{2}{7}$ est le nombre par lequel on multiplie 7 pour obtenir 2 donc $7\times\frac{2}{7}=2$. De même $3\times\frac{5}{3}=5$. Si on multiplie $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ par 7×3, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $7\times\frac{2}{7}\times 3\times\frac{5}{3}$ soit, d'après ce qui précède : 2×5. On en déduit donc que $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ est le nombre par lequel on multiplie 7×3 pour obtenir 2×5. Donc $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times 5}{7\times 3}$.	a, b, c et d sont quatre nombres quelconques ; b et d sont différents de zéro. $\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel on multiplie b pour obtenir a donc $b\times\frac{a}{b}=a$. De même $d\times\frac{c}{d}=c$. Si on multiplie $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ par $b\times d$, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $b\times\frac{a}{b}\times d\times\frac{c}{d}$ soit, d'après ce qui précède : $a\times c$. On en déduit donc que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ est le nombre par lequel on multiplie $b\times d$ pour obtenir $a\times c$. Donc $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Exemple 3

La figure ci-contre est dessinée à main levée pour bloquer les procédures de reconnaissance visuelle (il convient cependant de gérer les implicites liés à ce type de figure au sein du contrat didactique).



Une rédaction formalisée n'est pas attendue ; la résolution passe par la reconnaissance de configurations (le triangle 6, 8, 10 relève de l'automatisme ou suppose l'utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore), puis l'utilisation du théorème et la donnée du résultat sous forme exacte.

Le calcul et le raisonnement sont ici fortement imbriqués.

Exemple 4

Le recours au calcul instrumenté n'est pas dépourvu de raisonnement. Ainsi :

- l'exécution d'un calcul machine requiert une organisation réfléchie (assimilation des priorités de calcul, conception d'un algorithme) ;
- la simulation d'une expérience aléatoire est en fait la simulation d'une loi de probabilité connue implémentée par l'utilisateur, ce qui résulte déjà d'une modélisation.

Exemple 5

Quel est le chiffre des unités de 2^{100} ?

Ce calcul requiert, étant donné la taille du nombre, le recours à des procédures raisonnées que l'on peut combiner entre elles, telles que : l'examen du seul chiffre des unités dans un produit, le calcul des premières puissances de 2, le recours raisonné à un tableur pour examiner une périodicité, etc.

On pourra se reporter [7] pour d'autres exemples.

2. Le sens et les contrôles

Un calcul prend d'abord du sens à travers la résolution d'un problème. C'est vrai dans la phase d'apprentissage comme en cours d'étude :

- l'égalité de deux fractions, les opérations avec les fractions sont légitimement motivés par des problèmes de partage d'aires ;
- la problématique de résolution d'une équation intervient naturellement avec la remontée d'un algorithme, avec la détermination d'un nombre inconnu dans un problème ;
- la dérivée d'une fonction intervient à travers un problème de tangente, de recollement lisse, de sens de variation ou d'optimisation ;
- etc.

Dans cette phase où le calcul est d'abord motivé, puis développé, le retour au contexte permet parfois un contrôle et une justification de chaque étape, puis du résultat.

Le retour au sens est également apporté grâce aux contrôles, par d'autres formes de calculs ou de vérifications. Ces contrôles garantissent la justesse d'un calcul, ils interviennent dans de nombreux domaines et on doit y faire appel le plus souvent possible. On peut en recenser quelques formes :

- en calcul numérique, le contrôle des ordres de grandeurs, du chiffre des unités, la preuve par 9, un calcul machine approché sont quelques exemples ;
- en arithmétique, on pense aux congruences, aux critères de divisibilité ;
- en calcul littéral, on peut contrôler un calcul avec l'homogénéité des lettres, avec le degré d'un polynôme, avec la substitution de valeurs numériques ;
- en probabilités, la simulation à l'aide d'un logiciel permet de contrôler un résultat grâce à la loi des grands nombres ;
- en algorithmique, le déroulement pas à pas est une vérification essentielle, c'est une bonne garantie de fonctionnement, c'est également un recours utile pour débusquer une erreur ;
- en analyse, le calcul instrumenté permet de vérifier la valeur d'un maximum.

3. Le sens et la cohérence

Le calcul est porteur de la cohérence de l'enseignement des mathématiques. Il est également emblématique des interactions avec d'autres disciplines.

Ainsi, au collège c'est par les calculs de grandeurs que se crée le lien entre géométrie et numérique. Au lycée, des calculs d'optimisation lient le calcul littéral et l'analyse à la géométrie

Pour contribuer à donner sens au calcul, il est pertinent d'enrichir les contextes mathématiques du calcul et de renforcer les liens avec les autres disciplines. Le travail sur les grandeurs, mesures et dimensions s'y prête tout à fait dès l'école élémentaire. Le calcul statistique, à partir du collège, peut permettre d'élargir les interactions en direction d'autres disciplines comme la biologie, la géographie, les sciences économiques et sociales. Le calcul fonctionnel en analyse, le calcul probabiliste et le calcul sur des objets discrets ouvrent, dans les dernières années du lycée et à l'université, d'autres perspectives.

4. La disponibilité des différents registres, la flexibilité entre ces registres

La bonne conduite d'un calcul est également conditionnée par le transfert dans un autre registre.

Exemple 1 (classe de 3^{e})

Pour souscrire un abonnement de téléphonie mobile, Sara hésite entre deux formules :

- formule *A* : un abonnement mensuel de 20 €, puis 0,002 € par seconde de communication ;
- formule *B* : un abonnement mensuel de 15 €, puis 0,003 € par seconde de communication.

Dans chaque cas, les SMS sont illimités.

Quelle formule Sara doit-elle choisir ?

La première idée de Sara est de dire : « *0,002 ou 0,003, c'est pareil car il n'y a même pas un centime d'euro de différence. Je choisis donc la formule B puisque l'abonnement est bien meilleur marché* ». Nous sommes là dans le registre du bon sens, le calcul résulte d'une estimation que l'on peut trouver raisonnable.

Une deuxième idée consiste à essayer deux hypothèses : Sara va téléphoner soit 1 heure soit 2 heures par mois. Nous sommes alors dans le registre du calcul numérique.

- Pour 1 h, la formule A revient à 27, 20 €, la formule B à 25,80 €. La formule B est plus avantageuse.
- Pour 2 h, la formule A revient à 34, 40 €, la formule B à 36,60 €. Cette fois, c'est la formule A qui est plus avantageuse.

La comparaison n'étant pas évidente, Sara décide d'approfondir la question. Une première idée consiste à comparer les deux formules en utilisant un tableur. Elle affiche les calculs pour toutes les valeurs comprises entre 3600 et 7200 secondes, et résout le problème en remarquant l'égalité des deux formules pour 5000 secondes c'est-à-dire 1 h 23 min 20 s. Ce travail est conduit dans le domaine des variables.

Son amie Nina est une virtuose du calcul algébrique. Elle note x la durée en secondes des communications mensuelles. À ce moment, x désigne une inconnue.

Nina formalise le problème et trouve que la formule A est plus avantageuse lorsque $0,002x + 20 < 0,003x + 15$. Pour résoudre cette inéquation, elle utilise les propriétés du calcul littéral, et travaille dans le registre des indéterminées. Elle trouve alors $x > 5000$ et en déduit la solution du problème.

Commentaire :

Chacune des deux amies résout le problème avec une méthode plus ou moins experte, mais avec plusieurs changements de registre.

Exemple 2 (classe de 2nde, de 1e ES)

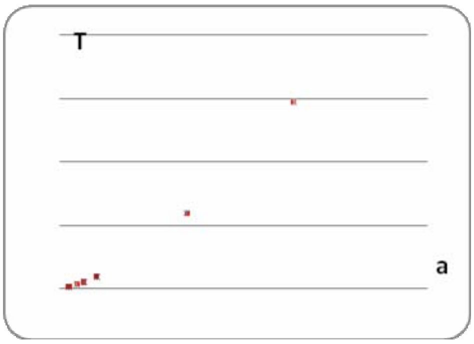
Du temps de Képler, on connaissait six planètes du système solaire, ainsi que leur période de révolution T autour du Soleil (en années), et leur distance moyenne au Soleil a (l'unité de distance étant la distance moyenne de la Terre au Soleil). En 1619, Képler a pu expliciter une relation de dépendance entre T et a. Laquelle ?

Planète	a	T
Mercure	0,39	0,24
Vénus	0,72	0,62
Terre	1	1
Mars	1,52	1,88
Jupiter	5,2	11,86
Saturne	9,54	29,46

C'est d'abord la visualisation graphique des points correspondants qui conduit à conjecturer une relation de dépendance, d'abord de type $T = k \times a^2$ parce que la courbe représentant la fonction « carré » est bien mémorisée.

Les valeurs pour la Terre conduisent à $k = 1$.

Cette conjecture est réfutée par l'examen des valeurs de a^2, mais nous sommes sur la piste d'une relation de dépendance de type « puissance ».



Un peu de tâtonnement à l'aide d'un tableur (voir le tableau de valeurs ci-après) conduit finalement à conjecturer que $T^2 \approx a^3$.

a	T	a^2	a^3	T^2
0,39	0,24	0,15	0,06	0,06
0,72	0,62	0,52	0,37	0,38
1	1	1,00	1,00	1,00
1,52	1,88	2,31	3,51	3,53
5,2	11,86	27,04	140,61	140,66
9,54	29,46	91,01	868,25	867,89

La relation conjecturée n'est autre que la troisième loi de Képler, qui sera justifiée et affinée par Newton : $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} a^3$, où a est la longueur du demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la planète, M la somme des masses (Soleil + planète) et G la constante de la gravitation universelle.

Commentaire :

C'est le passage par le registre graphique qui est décisif. Ce problème révèle aussi l'importance de disposer d'une panoplie de fonctions usuelles, avec leur courbe représentative associée. L'utilisation du calcul instrumenté, notamment le tableur, permet aussi d'obtenir des courbes de tendance : il est d'ailleurs mobilisé dans ce contexte en sciences physiques.

3. Quelques stratégies pédagogiques

1. Pratiquer le calcul mental, les activités à gestion mentale

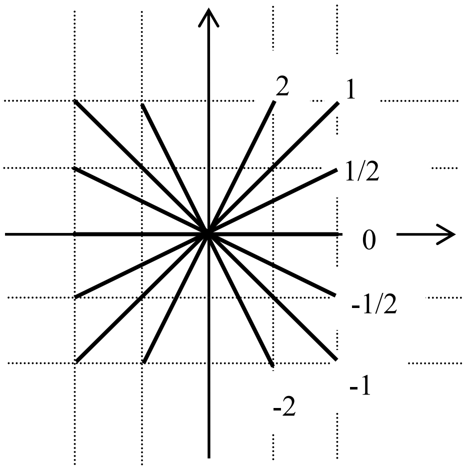
- Le calcul mental est intéressant en soi, d'abord parce qu'il permet d'acquérir des procédures de calcul utiles pour la vie quotidienne, ensuite parce qu'il contribue à l'acquisition de savoir faire automatisés qui libèrent la pensée pour d'autres tâches plus complexes. Le calcul mental construit notre bonne connaissance des nombres, à commencer par les entiers, et enrichit leur appréhension dans plusieurs registres : 25 %, c'est le quart, c'est la fraction $\frac{1}{4}$ et le décimal 0,25 ; cet automatisme permet le calcul immédiat de $24 \times 0,25$.
- De bonnes compétences en calcul mental sont indispensables pour prévoir un ordre de grandeur d'un résultat, pour permettre une utilisation raisonnée de la calculatrice, pour développer l'esprit critique face à un résultat obtenu autrement.
- Le calcul mental aide à la résolution de problèmes, il permet d'expérimenter, de développer des initiatives, de développer des stratégies à partir d'essais et de tâtonnements, de développer aisance et rapidité dans la gestion de calculs plus complexes. (Voir [11].)
- Le calcul mental réfléchi est l'occasion d'un véritable raisonnement et participe pleinement en cela au développement de la compétence « raisonner ».
- La pratique régulière du calcul mental favorise la progressivité des apprentissages. Avant l'apprentissage, elle permet d'anticiper, de préparer l'étude d'un savoir. Pendant la phase d'apprentissage, elle facilite l'appropriation des notions ou propriétés travaillées. Après l'apprentissage, elle permet un réinvestissement régulier, et à long terme, **de** l'appropriation des savoirs et leur mobilisation dans des situations inédites.
- Le calcul mental participe de façon pertinente à toutes les formes de l'évaluation. C'est une modalité efficace d'évaluation diagnostique. Sur le plan formatif, les temps de mise en commun collective dédramatisent l'erreur, facilitent le débat participatif et argumenté. Les élèves qui réussissent en calcul mental n'étant souvent pas les mêmes que ceux qui réussissent dans les activités plus classiques, il y a lieu de reconnaître leurs réussites en prévoyant des situations d'évaluation sommative en calcul mental.
- Le calcul mental favorise la différenciation pédagogique en laissant vivre différentes procédures, différentes réponses plus ou moins abouties, en évitant le passage à l'écrit systématique et en favorisant ainsi l'entrée d'un nombre plus important d'élèves dans les apprentissages mathématiques, en permettant à chacun de développer le champ de ses procédures disponibles en l'optimisant, en variant les consignes (résultats intermédiaires autorisés avec objectif de s'en libérer petit à petit, temps donné variable pour répondre, consignes écrites et/ou orales, forme des énoncés …).
- Les activités mentales régulières, et même ritualisées, facilitent la gestion de classe. Elles sont souvent des moments d'intense activité de la part de l'élève, elles sont motivantes et stimulent l'attention.

2. Développer des images mentales

Le cas de la trigonométrie est exemplaire à ce sujet. On sait toute l'importance de mobiliser l'image mentale du cercle trigonométrique dans les problèmes de base : c'est le cas pour retrouver les valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente, pour déterminer l'ensemble de définition et le sens de variation des fonctions trigonométriques, pour retrouver rapidement certaines inégalités telles que $0 \leq \sin x \leq \tan x$ lorsque $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, pour résoudre les équations trigonométriques $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos b$, …

On sait également l'importance des courbes représentatives des fonctions de référence pour résoudre l'équation $x^2 = a$ (a réel), pour mémoriser les résultats sur le signe du trinôme, pour donner rapidement le nombre de solutions de l'équation $x^3 = x - 3$, pour comparer x et x^2, pour ajuster une fonction d'un type donné à un tableau de valeurs, …

En géométrie analytique, on connaît l'avantage qu'il y a à mémoriser, en repère orthonormal, les directions associées aux coefficients directeurs « de base », tels que 0, -1 et 1, -2 et 2. C'est utile pour toute la géométrie analytique de la droite, mais encore pour les problèmes de tangente. Ci-contre, *l'araignée* constitue une image mentale intéressante.



L'araignée

L'apprentissage doit contribuer à développer ce type d'images mentales.

3. Anticiper et expliciter

La part de raisonnement intrinsèque au calcul, lorsqu'il ne se réduit pas à un geste mécanique, mérite d'être davantage explicitée dans l'enseignement. Il faut apprendre aux élèves à anticiper.

Par exemple :

- anticiper la forme la plus pertinente d'une fonction dérivée selon l'usage que l'on veut en faire ;
- anticiper la forme la plus appropriée d'une fonction polynôme du second degré selon le type de problème à traiter ;
- anticiper le choix de la décomposition d'un vecteur donné dans un but fixé ;
- etc.

4. Trouver la juste place du calcul instrumenté

S'agissant de la calculatrice, du tableur ou des logiciels de calcul formel, la pertinence du calcul instrumenté dépend de l'usage que l'on en fait.

- **Le calcul instrumenté peut être néfaste aux apprentissages** lorsque son usage est trop précoce ou lorsqu'il est exclusif. En effet, les premiers pas dans l'apprentissage d'une notion calculatoire demandent une pratique dans laquelle la gestion mentale ou écrite doit prendre le dessus. Le recours à la machine doit donc être proscrit dans cette phase. En cours d'apprentissage et dans la résolution d'un problème, l'efficacité calculatoire est basée sur une réflexion stratégique sur le type de calcul le plus approprié, mais aussi sur des allers retours entre le calcul et son interprétation.
- **Il est un outil précieux d'investigation** car il facilite l'émission de conjectures dans des situations variées (résolution d'équations, comportement d'une fonction ou d'une suite, simulation au service des probabilités) par sa rapidité à effectuer des calculs complexes ou les

possibilités d'accès à un grand nombre de calculs (tableur, logiciel d'algorithmique). Par ailleurs, il permet des changements de registres.

- **Il facilite la résolution de problèmes**, permettant notamment aux élèves d'accéder à des problèmes intéressants sans être bloqués par les difficultés calculatoires. C'est le cas avec les solveurs des calculatrices, et plus généralement avec le calcul formel, qui permet par exemple de calculer des dérivées de fonctions compliquées, de factoriser des polynômes, …
- **Son bon usage réside souvent dans une utilisation hybride**, combiné avec d'autres types de calculs, notamment dans la résolution de problèmes.
- **Il peut être un but en soi**, c'est notamment le cas en algorithmique. Le langage naturel est certes conseillé en début d'apprentissage, mais la finalité d'un algorithme reste son implémentation sur un instrument qui automatise la procédure.
- **Il peut être source de problèmes** comme dans les deux exemples suivants.
  - Le calcul machine de $123\,456\,789^2 - 123\,456\,788 \times 123\,456\,790$ donne 0. Un contrôle du chiffre des unités contredit ce résultat. Cela occasionne un problème intéressant en 3e.
  - Le calcul instrumenté de $\dfrac{(1+x^3)^2-1}{x^3}$ pour des valeurs de x suffisamment voisines de 0 donne 0, alors que l'on devrait trouver une valeur voisine de 2. Cela permet un travail intéressant en Seconde sur le développement du carré ou en Terminale sur la notion de limite.
- **Les logiciels de calcul formel** ont fait la preuve de leur *redoutable* efficacité. Il faut toutefois prendre la mesure des difficultés de prise en main de ces logiciels dont la syntaxe requiert un apprentissage en soi. Dans le second degré, cet apprentissage peut demander aux élèves de lycée au moins autant d'efforts que d'effectuer les calculs de façon plus artisanale avec les moyens disponibles, ce qui n'est pas le cas bien sûr dans l'enseignement supérieur scientifique, où la complexité des calculs rentabilise l'effort de prise en main. Le recours au calcul formel au lycée peut se limiter à un usage « presse bouton » ou au contraire faire appel à des compétences plus évoluées. La liberté pédagogique du professeur en la matière doit s'exercer en aval d'une véritable réflexion. Cette réflexion peut prendre en compte les innovations technologiques, en particulier celles permettant une saisie et un calcul rapide d'expressions écrites, avec un stylet sur une tablette numérique, ou avec un stylo sur un TNI (tableau numérique interactif).
- **Formation et évaluation des élèves**
  Dans la formation des élèves, on peut « faire feu de tout bois » en prônant une utilisation sans frein de tous les instruments de calcul disponibles dans la résolution de problèmes, mais de façon raisonnée.
  En évaluation, il convient de s'inspirer de la note de l'IGEN du 11 août 2011 qui précise, s'agissant des contrôles et des examens :
  « *Les auteurs de sujets prendront toutes les dispositions nécessaires pour ne pas favoriser les possesseurs de matériels trop perfectionnés en fournissant, par exemple, aux candidats des documents avec les sujets.* ».
- **Instrumentation du calcul et différenciation pédagogique**
  L'instrumentation du calcul a aussi sans doute un autre rôle à jouer, de façon plus marginale. Pour certains élèves, une fiabilité insuffisante du calcul écrit est un véritable handicap. Un calcul peu sûr ne devrait pas constituer un blocage à toute activité mathématique (une orthographe incertaine n'interdit pas l'écriture !). Dans ces conditions, un calcul assisté, même dans des cas que l'on voudrait voir maîtrisés sans machine, peut être le moyen de permettre à certains un travail mathématique et des apprentissages, qui seraient impossibles sans assistance.

4. Un exemple de mise en œuvre filée : introduction de la notion de racine carrée

Inspiré de Gilles BOURDENET (voir [3]), voici un exemple d'introduction possible de la racine carrée, essentiellement basée sur une bonne anticipation, un apprentissage progressif et régulier, enfin une pratique prenant appui sur le calcul mental. Cette approche permet aux élèves de construire pas à pas leur connaissance de la notion de racine carrée, et des propriétés calculatoires.

Prérequis

- Calcul mental des carrés des entiers de 1 à 20.

Ces calculs demandent une installation progressive qui peut commencer dès la sixième.

Les premiers pas

En quatrième, le travail lié aux calculs de longueurs avec le théorème de Pythagore permet de préparer l'étude des racines carrées en troisième : en déterminant sans utiliser la touche racine carrée de la calculatrice des encadrements par approches successives des longueurs recherchées, on est amené à manipuler le nombre positif dont on connaît le carré.

- Calculs élémentaires de $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{144}$, …, $\sqrt{225}$.
- Encadrer par deux entiers $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{60}$, $\sqrt{150}$.
- Relier l'égalité $\sqrt{9}=3$ à $3^2=9$, l'égalité $\sqrt{25}=5$ à $5^2=25$, etc.
- Formuler en français la définition de $\sqrt{5}$, de $\sqrt{13}$, etc.

Chacun de ces exercices peut être pratiqué quelques minutes par séance pendant plusieurs séances, avant d'aller plus loin.

Parallèlement à ces exercices, une réflexion peut-être menée sur la nature des nombres travaillés en montrant par exemple à l'aide de l'algorithme de la multiplication posée que $\sqrt{2}$ ne peut pas être décimal. La démonstration de l'irrationalité est plus difficile à envisager en troisième.

Perfectionnement sur la définition

- Calculer $(\sqrt{5})^2$, $(\sqrt{13})^2$, …, et $\sqrt{5^2}$, $\sqrt{13^2}$, etc.
- Calculer $\sqrt{5}\times\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}$, $(2\sqrt{7})^2$, etc.
- Quel est le carré de $\sqrt{13}$? de $3\sqrt{5}$? de $2\sqrt{11}$?
- Calculer $\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$, $\sqrt{5}(2\sqrt{5}+3)$, $(\sqrt{2})^3$.
- Exprimer en fonction de $\sqrt{2}$ les nombres $(\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{2})^3$, $(\sqrt{2})^4$, $(\sqrt{2})^5$.

Tout en confortant la maîtrise de la définition, ces travaux peuvent se mener à petite dose, sur plusieurs séances, en explicitant les étapes du calcul.

Réductions

- Réduire $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}-\sqrt{3}$, etc.

Ces calculs font percevoir que $\sqrt{a}$ est un nombre à part entière.

Du point de vue des procédures, il est intéressant de stabiliser les priorités de calcul, puis d'appliquer la méthode de factorisation pour faire comprendre que $\sqrt{a}$ se comporte comme x dans un calcul de réduction.

Ce type de calcul doit également se pratiquer sur plusieurs séances avant d'introduire une difficulté supplémentaire.

Sens de certaines expressions littérales

- Compléter : si $x=\sqrt{5}$, alors $x^2=\ldots$; alors $2x^2=\ldots$.
- Compléter : si $x=2\sqrt{3}$, alors $x^2=\ldots$; alors $2x^2=\ldots$.

L'enjeu est notamment de travailler à nouveau sur les priorités de calcul dans l'expression $2x^2$.

Équation $x^2 = a$

Lorsque $a>0$, la solution négative est fréquemment oubliée, notamment parce que l'élève est focalisé sur la procédure et a perdu le sens. Il est conseillé d'installer comme image mentale la représentation graphique de la fonction « carré », et de recourir à cette courbe pour retrouver parallèlement les solutions. Une pratique progressive du calcul mental sur des exemples numériques tels que $x^2=9$, $x^2=49$, …, puis $x^2=3$, $x^2=7$, …, est recommandée.

Racines carrées et opérations

Lorsque la notion de racine carrée est installée, on peut introduire la propriété de la racine carrée du produit de deux nombres positifs.

Une introduction possible : on donne un carré de côté une unité de longueur. On demande de calculer la longueur exacte de la diagonale de ce carré agrandi à l'échelle 5.

Deux procédures peuvent être mises en œuvre :

- calculer la longueur de la diagonale du carré unité puis l'agrandir ;
- agrandir le carré puis calculer la longueur de sa diagonale.

On en déduit que $5\times\sqrt{2}=\sqrt{50}$.

On peut ensuite inviter les élèves à construire la « table » de multiplication de racine carrée de 2 et de formuler une conjecture concernant la racine carrée d'un produit. Cette conjecture est ensuite démontrée de façon générale.

L'ensemble de ces apprentissages peut être réparti sur plusieurs mois de l'année de troisième.

Bibliographie

[1] Inspection générale, Rapport *Le calcul au collège*, 2004.

[2] Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, *Rapport d'étape sur le calcul*.

[3] Gilles BOURDENET, *Calcul mental*, IREM de Strasbourg, revue Activités mathématiques et scientifiques n°61, mission laïque française.

[4] Marie MÉGARD, *Le socle commun de référence*, revue Activités mathématiques et scientifiques n°63, mission laïque française.

[5] Gilles ALDON, Luc TROUCHE, *Calcul formel et enseignement des mathématiques : fond, forme(s) pratique(s)*, Actes de l'université d'été de Saint-Flour, 2008.

[6] Michèle ARTIGUE, *L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives*, conférence, REPÈRES-IREM n° 54, janvier 2004.

[7] Michèle ARTIGUE, *L'intelligence du calcul*, conférence, Actes de l'université d'été de Saint-Flour, août 2005.

[8] *Activités mentales et automatismes au collège*, publication de l'IREM de Clermont-Ferrand, 2010.

[9] *Calcul mental et automatismes, niveau lycée*, publication de l'IREM de Clermont-Ferrand, 2007.

[10] *n, c'est un nombre ou c'est des nombres*, publication de l'IREM des Pays de Loire, REPÈRES-IREM n° 54, janvier 2004.

[11] Denis BUTLEN, *Le calcul mental entre sens et technique*.