Olympiades mathématiques- Session 2020
Exercices académiques

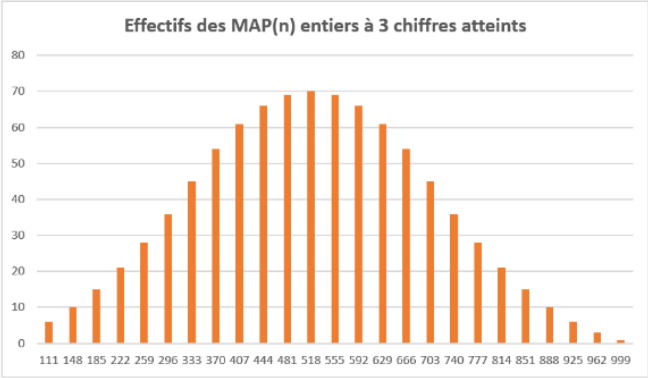
Eléments de corrections – Exercice 1

Q.	R.	C.
1.	$MAP(51) = \frac{51+15}{2} = 33,$ $MAP(411) = \frac{411+411+141+141+114+114}{6} = 222,$ $MAP(2020) = \ldots = 1111.$	Calculer
2.a.	Oui : $MAP(31) = MAP(13)$. Plus généralement, deux permutés d'un même entier ont la même MAP.	Chercher
2.b.	(i) Non : $MAP(14) = \frac{14+41}{2} = 27{,}5$. C'est par exemple le cas des entiers à 2 chiffres dont la somme des chiffres est impaire. (ii) Non : les exemples introductifs, auxquels on ajoute $MAP(22) = 22$, montrent que la MAP d'un entier pair peut être paire ou impaire, tout comme celle d'un entier impair.	Chercher
2.c.	Dans le cas général, cette formule est bien entendue fausse. Toutefois, il existe des entiers qui satisfont la relation. Exemple : $MAP(10+20) = MAP(30) = 16{,}5$ et $MAP(10) + MAP(20) = 5{,}5 + 11 = 16{,}5$.	Calculer Chercher Raisonner
3.a.	Plus petite valeur : $MAP(100) = 37$. Plus grande valeur : $MAP(999) = 999$. On attend des raisonnements qualitatifs e.g., pour la plus petite valeur : on doit choisir un entier à trois chiffres, contenant le maximum de 0 possibles (donc 2) et tel que le chiffre restant soit le plus petit possible (donc 1) afin que les permutés soient les plus petits possibles, leur somme et leur moyenne également. On trouve 100.	Chercher Raisonner
3.b	Non : $MAP(100) = 37$. Le nombre de chiffres de $MAP(n)$ est au plus égal au nombre de chiffres de n : si n s'écrit avec p chiffres, ses permutés s'écrivent avec au plus p chiffres donc leur moyenne s'écrit au plus avec p chiffres. En fait, si n s'écrit avec p chiffres, $MAP(n)$ s'écrit avec p ou $p-1$ chiffres. En effet, si on calcule $MAP(10^{p-1})$, 10^{p-1} étant le plus petit entier à p chiffres, on se rend compte qu'elle ne peut être strictement inférieure au nombre composé de $p-2$ fois le chiffre 9 et donc qu'on ne peut pas « perdre » deux chiffres.	Chercher
3.c.	Si n a deux chiffres, alors $n = 10d + u$ donc $MAP(n) = \frac{10d+u+10u+d}{2} = 11 \times \frac{d+u}{2}$. $MAP(n)$ étant entier par hypothèse, c'est un multiple de 11. Céline a donc raison. La réciproque est fausse. Contre-exemple : $MAP(2020) = 1111 = 101 \times 11$.	Raisonner Chercher
4.a.	$MAP(1111) = 1111,\ MAP(2222) = 2222$, …. , $MAP(9999) = 9999$ Pas d'autre solution que les 9 présentées.	Chercher
4.b.	Solutions à deux chiffres : $MAP(10d+u) = 10d + u \Leftrightarrow 11 \times \frac{d+u}{2} = 10d + u \Leftrightarrow d = u$. On trouve neuf solutions : $11, 22, 33, \ldots\ 99$. Solutions à trois chiffres : $MAP(100c + 10d + u) = 100c + 10d + u$ $\Leftrightarrow \frac{100 \times (2c + 2d + 2u)}{6} = 100c + 10d + u$ $\Leftrightarrow 37 \times (c + d + u) = 100c + 10d + u$ $\Leftrightarrow 63c = 27d + 36u$	Raisonner Chercher Calculer

On trouve quinze solutions en fixant successivement la valeur de c :

$$111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888, 999.$$

Pour la beauté de l'information :



5.a. Raisonner, Modéliser

Programme Python :

```
def map(n) :
    somme = 0
    for k in permutes(n) :
        somme = somme + k
    return somme / len(permutes(n))
```

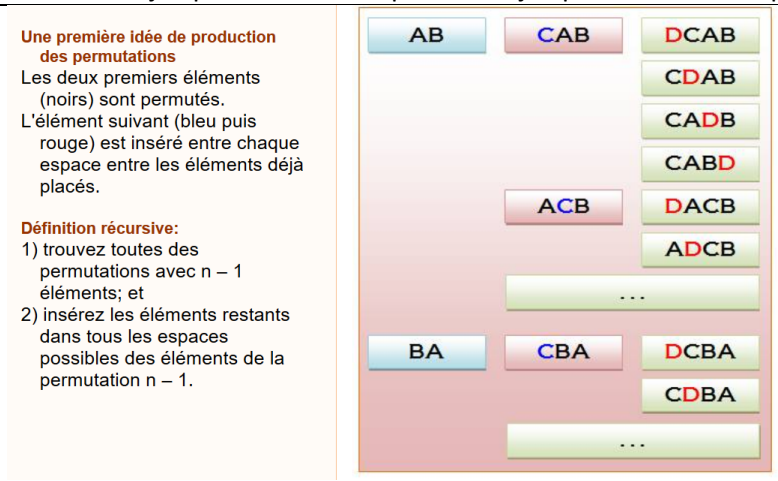
5.b. Raisonner, Modéliser

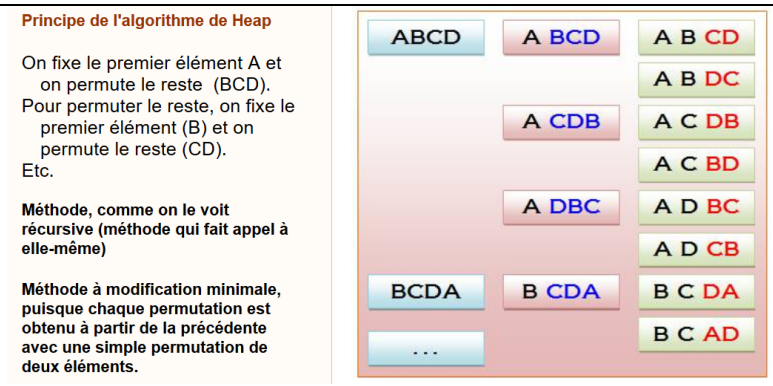
Programme Python :

```
for i in range(100, 100000) :
    if map(i) == 2020 :
        print(i)
```

On cherche jusqu'à 99999 car n peut avoir jusqu'à un chiffre de plus que $MAP(n)$

5.c. Raisonner, Modéliser





Captures d'écran du site de M. Gérard Villemin.
Un raisonnement présenté sous la forme d'un arbre est tout-à-fait envisageable.

Capture d'écran Python :

```python
import itertools

def permutes(entier):
    L = list(str(entier))
    liste = []
    for t in list(itertools.permutations(L)):
        liste.append(int("".join(t)))
    return liste

def map(n):
    somme = 0
    for k in permutes(n):
        somme += k
    return somme/len(permutes(n))

for nb in range(10, 100000):
    if map(nb) == 2020:
        print(nb)
```

Eléments de corrections – Exercice 2

Partie I.

1) $\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{7} = \frac{4}{9}$ et $\frac{7}{3} \oplus \frac{1}{5} = 1$

2) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implique $ad < bc$ et donc $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ba+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$

Idem pour $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Partie II.

1) $F_4 = \left(\frac{0}{1};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{1}{1}\right)$ et $F_5 = \left(\frac{0}{1};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{1}{1}\right)$.

2) a) Montrons que $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$ est irréductible.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un diviseur $d \neq 1$ commun à $b-a$ et *b*.

Alors $b-a=dk$ et $b=dk'$ d'où $a=d(k'-k)$ ce qui signifie que *d* divise *a* :

impossible car $\frac{a}{b}$ est irréductible.

b) $\frac{a}{b} \in F_n$ signifie $\frac{a}{b}$ est irréductible, $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ et $b \leq n$.

On a vu que $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$ est irréductible (en 2.a)

On a clairement $0 \leq 1-\frac{a}{b} \leq 1$

Et bien sûr $0 \leq b-a \leq b \leq n$

D'où $1-\frac{a}{b} \in F_n$

Montrons que $\frac{1}{2}$ est bien situé entre $\frac{a}{b}$ et $1-\frac{a}{b}$.

2 cas évidents à faire : si $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$ et si $\frac{a}{b} > \frac{1}{2}$.

3) a) Un terme d'une suite de Farey (différent de 0 et 1) est égal à la somme des cancres des deux qui l'entourent.

b) immédiat (en simplifiant certaines fractions)

4) a) On trouve $\frac{2}{5}$ en faisant une recherche exhaustive.

b) Puis $\frac{3}{8}$ toujours par une recherche exhaustive.

c) La fraction recherchée est la somme des cancres des deux termes consécutifs d'une suite de Farey.

5) $F_6 = \left(\frac{0}{1};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{1}{1}\right)$

$F_7 = \left(\frac{0}{1};\frac{1}{7};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{2}{7};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{1}{2};\frac{4}{7};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{7};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};\frac{1}{1}\right)$

6) Lorsque la somme des dénominateurs de deux termes consécutifs de F_n est *n*+1, on intercale la somme des cancres de ces deux termes. En procédant ainsi pour toute la suite F_n, on obtient au finalement F_{n+1}.

Partie III.

1) F_n contient toutes les fractions de dénominateur au plus *n* rangées dans l'ordre croissant. Les deux termes de F_n qui encadrent *x* fournissent donc le meilleur encadrement possible dans ces conditions.

2) L'algorithme consiste à :

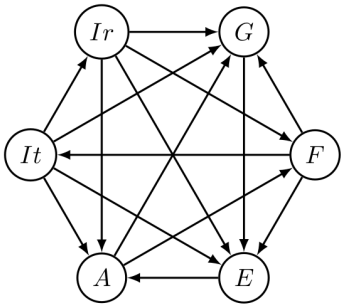
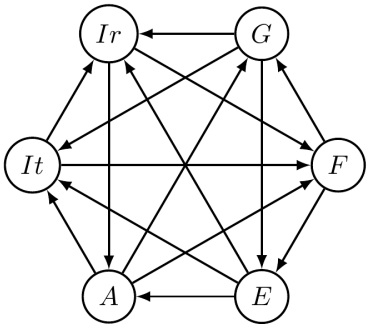
- effectuer l'addition des cancres des deux termes encadrant *x*
- comparer le résultat obtenu à *x*
- remplacer l'une des bornes de l'encadrement de *x* par ce résultat

On répète ce processus tant que le dénominateur ne dépasse pas 100.

On obtient donc le meilleur encadrement de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par deux fractions de dénominateurs inférieurs ou égaux à 100 soit : $\frac{70}{99} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{29}{41}$.

Eléments de corrections – Exercice 3

Question	Eléments de correction	Compétences
1	Il y a 15 matches par tournoi	Chercher Calculer Raisonner
2	L'Irlande a réalisé un grand chelem, l'Italie a remporté la cuillère de bois. Aucune équipe n'a remporté de mini chelem.	Chercher Communiquer Représenter
3	Non un grand chelem et un petit chelem ne peuvent pas arriver simultanément.	Chercher Raisonner Communiquer

	Supposons qu'une équipe A remporte un grand chelem, et considérons une autre équipe B. L'équipe A a battu tous ses opposants, y compris B. Or aucune équipe battue par B n'a pu battre A, donc B n'a pas remporté de mini chelem.	
4	Oui deux mini chelems sont possibles dans le même tournoi. Par exemple, dans la situation ci-dessous, la France et l'Italie ont toutes les deux réalisé un mini chelem :  Évidemment d'autres configurations sont possibles.	Chercher Représenter Raisonner
5	Six mini chelems sont possibles :  	Chercher Représenter Raisonner
6	Considérons l'équipe (notée A) qui a remporté le plus grand nombre de victoires. Si A n'a pas réalisé de mini chelem, alors une équipe (notée B) a battu A et aucune équipe ayant perdu contre A n'a gagné contre B. Autrement dit, B a avoir battu A et toutes les équipes que A a battues. Alors B a eu strictement plus de victoires que A. Contradiction.	Chercher Raisonner Communiquer