OLYMPIADES 2012 - Éléments de solution

Exercice 1 - National – Nombres digisibles

1. Les nombres possibles sont : 12, 15, 24, 36, 48.

2. Le nombre 1248 convient.

3. Soit *n* un entier digisible s'écrivant avec un 5.

a) Si le nombre est divisible par 5, son chiffre des unités est 0 ou 5. Or un nombre digisible ne peut contenir 0 (division impossible). Donc un nombre digisible contenant 5 admet 5 comme chiffre des unités.

b) Puisque le nombre se termine par 5, il est impair, donc tous ses chiffres sont impairs.

c) Tous les chiffres étant distincts, il y a au plus cinq chiffres {1, 3, 5, 7, 9}. Si ces cinq chiffres étaient présents, le nombre serait divisible par 3, ce qui est impossible car la somme des chiffres ne l'est pas.
Donc le nombre s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d) Si le nombre commence par 9, comme il se termine par 5, la seule possibilité pour les deux autres est {1, 3} en raison de la somme de chiffres.
Le nombre 9315 convient, et c'est le plus grand.

4. Soit *n* un entier digisible quelconque.

a) Le nombre s'écrit avec au plus neuf chiffres parmi {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
S'il contient le 5, il s'écrit avec au plus quatre chiffres d'après 3.
Supposons qu'il ne contienne pas le 5 ; il s'écrit donc avec au plus huit chiffres.

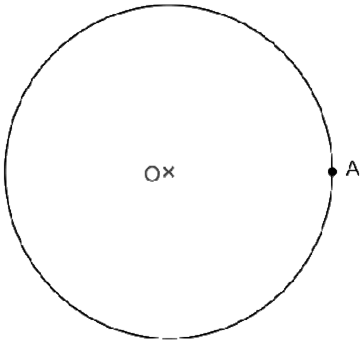
- s'il contient le 9, il ne peut s'écrire avec huit chiffres exactement, car dans la liste {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}, la somme des chiffres est 40 ; il s'écrit donc avec au plus sept chiffres ;
- s'il ne contient pas le 9, alors il s'écrit aussi avec au plus sept chiffres.

b) Si le nombre digisible de sept chiffres contient 9 et pas 5, les six autres chiffres sont à choisir dan la liste {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}. La seule possibilité est d'ôter le 4.
Donc les chiffres sont {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9}.

c) Essayons 9 comme premier chiffre. Pour que le nombre soit divisible par 1, 2, 3, 4, 6, 9, le plus petit chiffre des unités est 2.
Quelques essais donnent le plus grand : 9 867 312.

Exercice 2 - National – Points aléatoires dans une figure

Partie I



1. L'ensemble cherché est le segment [UV], intersection de la médiatrice de [OA] avec le disque.

2. L'ensemble cherché est la portion de disque de frontière [UV] contenant O, privée du segment [UV].

3. La probabilité cherchée est l'aire de la région précédente divisée par celle du disque.

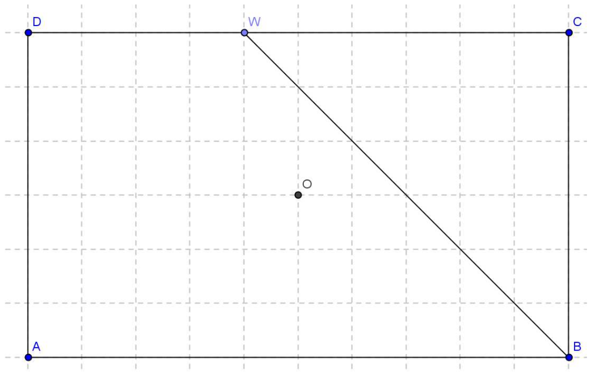
L'aire de la région est $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$, la probabilité $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,805$.

Partie II

1. Toutes les probabilités sont les rapports des aires à celle du rectangle.

La probabilité cherchée est égale à $\frac{1}{2}$.

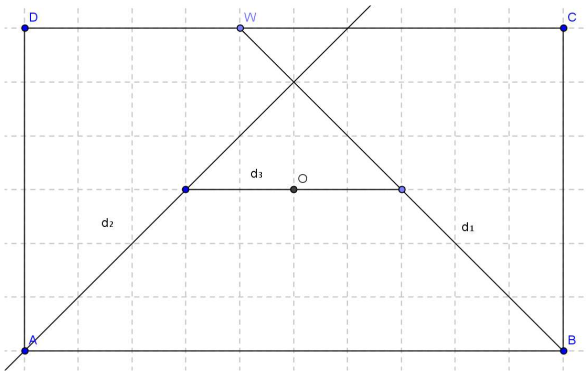
2.



a) L'ensemble cherché est le segment [BW] intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec l'intérieur du rectangle.

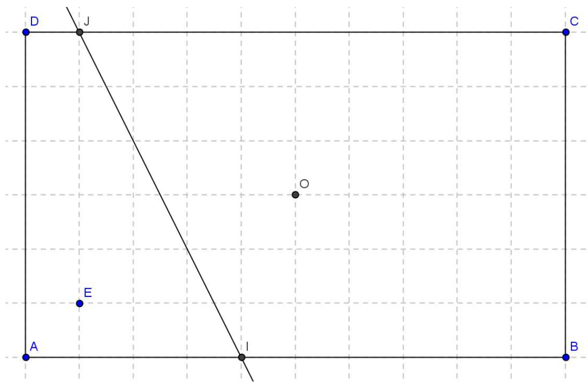
b) L'ensemble cherché est la portion du rectangle de frontière [BW] ne contenant pas O.

c) L'aire de la région est 72 cm^2, la probabilité est égale à 0,3.



3. On trace les bissectrices d_1 et d_2 des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAD}$, la médiatrice d_3 du segment [BC]. La région concernée est le trapèze limité par d_1, d_2, d_3 et [AB], son aire est égale à 84 cm^2.

La probabilité cherchée est $\frac{7}{20} = 0,35$.

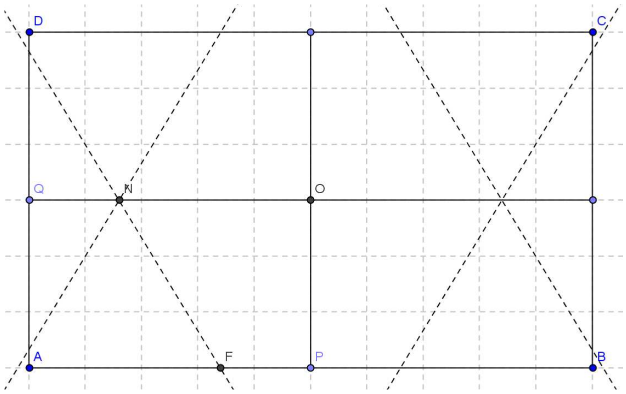


4. La médiatrice de [OE] coupe le rectangle en [IJ]. La région concernée est le trapèze ADJI, d'aire 60 cm^2.
La probabilité cherchée est 0,75.

5. On trace les quatre médiatrices des segments [OA], [OB], [OC], [OD]. La région concernée est l'hexagone limité par ces quatre droites et les côtés [AB] et [CD].

Le rectangle APOQ, de diagonale [AO] dont deux côtés sont portés par (AB) et (AC) est coupé en deux quadrilatères AFNO et FPON de même aire par la médiatrice de [AO]. Il en est de même pour les trois autres rectangles analogues.

La probabilité cherchée est égale à 0,5.



Exercice 3 - Académique – Le tour de magie

1. Avec 2012, le premier reste est 5, le deuxième est 4.
$5-4=1$, donc le chiffre supprimé est 1.

2. Le nombre choisi est 2598.

3. Si l'on admet un nombre avec 0, et si le nombre contient 9, les deux restes sont égaux que l'on supprime le 0 ou le 9, et l'on ne sait pas si le chiffre supprimé est 0 ou 9. Exemple : avec 2019, le reste est égal à 3 si l'on supprime 0 ou 9.

4. Notons respectivement *c*, *d*, *u* les nombres de centaines, de dizaines, d'unités du nombre.
La preuve repose sur l'égalité suivante :

$$100c+10d+u=99c+c+d+u=9(11c+d)+c+d+u\,.$$

5. On note *a*, *b*, *c* les trois chiffres du nombre, écrits dans cet ordre.
La question précédente nous autorise à considérer la somme des trois chiffres.
Par exemple pour retrouver *c*, on écrit : $a+b+c=9\times q+r_1$, puis $a+b=9\times q_2+r_2$.
On en tire : $c=9\times(q_1-q_2)+r_1-r_2$.

Comme $0\le c<9$ et $-9\le r_1-r_2\le 9$, on en tire $-9\le 9\times(q_1-q_2)<18$. Donc $q_1-q_2=0$ ou $q_1-q_2=1$.

- 1er cas : $r_1=r_2$. Puisque $c\neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $c=9$.
- 2ème cas : $r_1>r_2$, soit $r_1-r_2>0$. Dans ce cas $q_1-q_2=0$, sans quoi *c* serait supérieur à 9. D'où $c=r_1-r_2$.
- 3ème cas : $r_1<r_2$, soit $r_1-r_2<0$. Dans ce cas, $q_1-q_2=1$, sans quoi *c* serait négatif.

Finalement, $c=9+r_1-r_2$.

Exercice 4 - Académique Série S – Drôle de distance

1. Quelques généralités

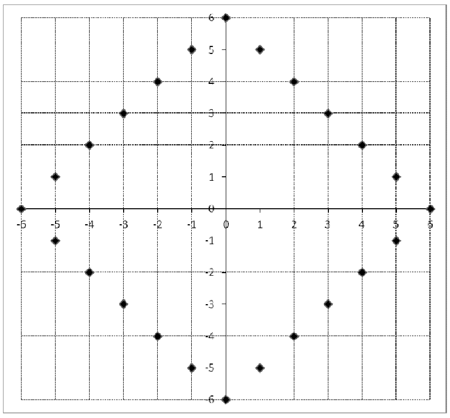
a) $d(\mathrm{O},\mathrm{A})=8$, $d(\mathrm{O},\mathrm{B})=d(\mathrm{O},\mathrm{C})=6$, $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=d(\mathrm{B},\mathrm{C})=8$, $d(\mathrm{A},\mathrm{C})=10$.

b) $d(\mathrm{M},\mathrm{N})=|x-x'|+|y-y'|$.

c) $d(\mathrm{M},\mathrm{N})$ a la même parité que $(x-x')+(y-y')$. Posons $\mathrm{P}(x'',y'')$.
$d(\mathrm{M},\mathrm{P})$ a la même parité que $(x-x'')+(y-y'')$ et $d(\mathrm{N},\mathrm{P})$ a la même parité que $(x''-x')+(y''-y')$.
La somme de ces deux nombres est égale au premier. Si les deux nombres sont pairs ou impairs tous les deux, la somme est paire, s'ils ont des parités différentes, la somme est impaire. Le résultat en découle.

2. Cercle

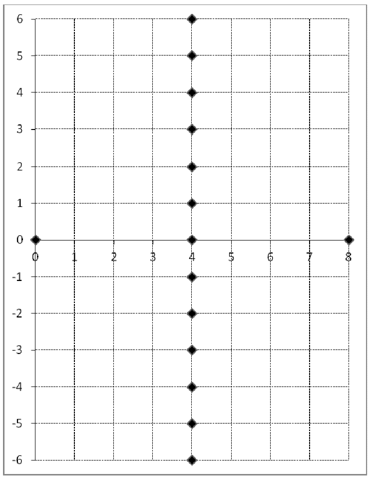
a) Le cercle de centre O, de rayon 6.



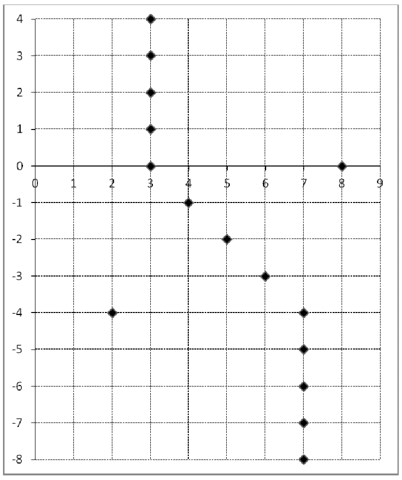
b) Le cercle contient $4r$ points.

3. Médiatrice d'un segment

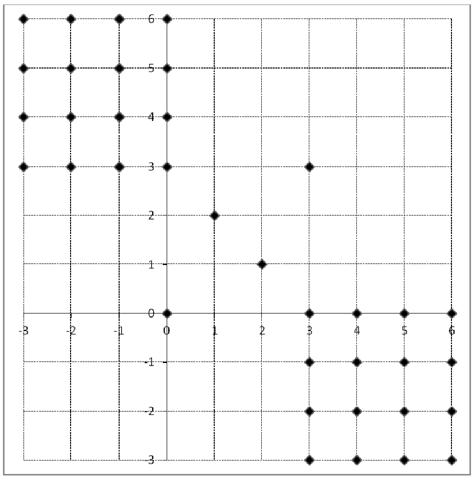
a) La médiatrice de [OA]



b) La médiatrice de [AC]



c) La médiatrice de [OB]



d) Si M appartient à la médiatrice du segment [IJ], on a $d(\mathrm{M},\mathrm{I})=d(\mathrm{M},\mathrm{J})$. Ces deux nombres sont soit pairs soit impairs tous les deux, donc on aurait parmi les trois distances soit trois nombres impairs, soit un nombre pair et deux impairs. C'est impossible d'après 1. c).

Donc, si $d(\mathrm{I},\mathrm{J})$ est impair, la médiatrice du segment [IJ] est l'ensemble vide.

Exercice 4 - Académique Séries autres que S – Pavage bicolore

1. Il y a quatre façons de disposer le carreau de gauche, puis deux façons de disposer celui de droite.

2. Il y a 8 façons de disposer les carreaux sur la première ligne.
Ensuite il y a 2 façons de disposer le carreau en bas à gauche, puis une seule façon de disposer le dernier carreau.
Au total : $8 \times 2 = 16$ dispositions possibles.

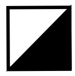
3. Il y a 4 façons de disposer le premier carreau, puis 2 façons pour chacun des suivants, soit au total $4 \times 2^{2\,011}$ façons, ou encore $2^{2\,013}$ façons.

4. La surface rectangulaire

a) Il y a 2^{21} façons de disposer les carreaux sur la première ligne.
Ensuite, pour chacune des 15 lignes, il y a 2 façons de disposer chacun des carreaux de la première colonne.
La première ligne et la première colonne étant fixées, il n'y a plus qu'une seule façon de disposer les carreaux restants
Le nombre total de dispositions est donc $2^{21} \times 2^{15}$, soit 2^{36}.

Remarque : avec *m* lignes et *n* colonnes, le nombre de dispositions est 2^{m+n}.

b) Pour que le bord de ce rectangle soit blanc, le premier carreau (du coin en haut à gauche) doit être disposé pour que son bord supérieur et son bord gauche soient tous les deux blancs :



Chaque carreau suivant de la première ligne et de la première colonne ont alors une disposition imposée par les contraintes.
Il n'y a donc qu'une seule disposition de la première ligne et de la première colonne donc, en raisonnant comme dans la question 4.a), une seule disposition au maximum de l'ensemble des carreaux.

Il reste à vérifier que la dernière ligne vérifie bien les contraintes. C'est le cas avec 16 lignes, ce ne serait pas le cas si le nombre de lignes était impair.