OLYMPIADES 2013 – ACADEMIE DE DIJON –
Éléments de solution pour les exercices nationaux et académiques

Exercice 1 – National – Les nombres Harshad

1.a) Notons $s(n)$ la somme des chiffres d'un entier *n*.

On a $s(364)=13$ et 364 est bien divisible par 13 car $364=13\times 28$.

1.b) Le plus petit entier est 11, qui n'est pas divisible par $s(11)=2$.

2.a) 1000 par exemple.

2.b) 10^{n-1} est un nombre Harshad de *n* chiffres.

3.a) C'est immédiat.

3.b) 1010, 1011 et 1012 sont trois nombres Harshad consécutifs.

3.c) À partir de la liste 110, 111, 112, et en intercalant *n* zéros après le 1 situé à gauche, on obtient une liste de trois nombres Harshad consécutifs de $n+3$ chiffres. En faisant varier *n*, on en obtient donc une infinité.

4.a) $s(A)=s(982\,080)=27$.

4.b) D'où $s(98208030)=30$, $s(98208031)=31$, $s(98208032)=32$, $s(98208033)=33$.

Or $98208030=100A+30=30\times(100\times 31\times 32\times 33+1)$,

$98208031=100A+31=31\times(100\times 30\times 32\times 33+1)$,

$98208032=100A+32=32\times(100\times 30\times 31\times 33+1)$,

$98208033=100A+33=33\times(100\times 30\times 31\times 32+1)$.

Ces quatre nombres sont consécutifs et de Harshad.

4.c) Une méthode : on intercale autant de zéros que l'on veut dans les nombres précédents, après la séquence 982080.

5.a) Soit $B=30\times 31\times 32\times 33\times 34=33390720$. $s(B)=27$.

Les nombres $100B+30$, $100B+31$, $100B+32$, $100B+33$, $100B+34$ forment une suite de cinq entiers consécutifs et de Harshad.

5.b) Pour tout entier *n*, les nombres $10^{n+2}B+30$, $10^{n+2}B+31$, $10^{n+2}B+32$, $10^{n+2}B+33$, $10^{n+2}B+34$ conviennent.

6.a) Le nombre *p* est de la forme $p=100A+10i+9$, avec A entier.

Alors $p+2=100A+10(i+1)+1$, puisque $i\leq 8$.

Ainsi $s(p)=s(A)+i+9$ et $s(p+2)=s(A)+i+1+1=s(A)+i+2$.

Cela montre que $s(p)$ et $s(p+2)$ sont de parités contraires.

p et $p+2$ sont tous les deux impairs, et l'un des deux au moins a une somme de chiffres paire d'après ce qui précède.

Or un nombre pair ne peut pas diviser un impair. Donc *p* et $p+2$ ne peuvent pas être tous deux de Harshad.

6.b) S'il existait 22 nombre de Harshad consécutifs, *n*, $n+1$, …, $n+21$, d'après la question précédente, aucun entier parmi *n*, $n+1$, …, $n+19$ ne doit être du type *p* précédent, c'est-à-dire avoir un chiffre des dizaines *i* compris entre 0 et 8 et un chiffre des unités égal à 9. Cela impose que le nombre formé par les deux derniers chiffres de *n* soit au moins égal à 90 et celui de $n+19$ soit au plus égal à 08. C'est impossible cal il y a 20 nombres pour 19 possibilités.

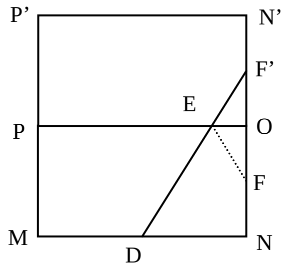
Exercice 2 - National – Le billard rectangulaire

1.a)

Cas général : il faut viser le point Q du rail [PO] situé sur la médiatrice de [DN], D étant le milieu de [MN].
Ce point est situé à 75 cm du point O.

1.b)

Si on construit le symétrique du rectangle par rapport au côté [PO], à toute trajectoire réelle DEF en une bande correspond une trajectoire fictive DEF’ rectiligne, si F’ est le symétrique de F.

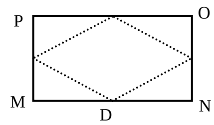


Le point E solution est tel que $\frac{OE}{DN} = \frac{F'O}{F'N} = \frac{1}{3}$.

Il est donc situé à 50 cm du point O.

1.c)

Une solution évidente est de viser le milieu de [ON].
Il est évident que la trajectoire est un losange de sommets les quatre milieux des côtés.



2.a)

1er cas : le point de départ D est distinct de M et N.
Avec le rectangle symétrique du 1.b), tous les points atteignables en une bande ont leur symétrique à l’intérieur du rectangle ON’P’P ou sur l’un des trois côtés sauf [PO].
On peut donc atteindre ainsi tous les points du billard sauf ceux situés sur le segment [PO]. Ces derniers sont atteignables de la même manière en symétrisant le rectangle initial soit par rapport à (ON), soit par rapport à (PM).
Tous les points sont atteignables en une bande.

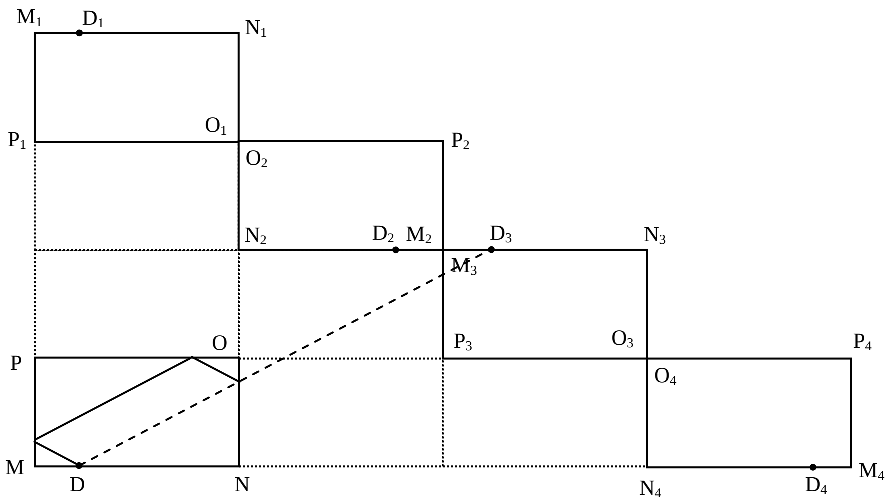
2e cas : D est confondu avec M
Avec la méthode précédente (symétrie par rapport à (OP), les points du segment [PM] sont eux aussi exclus. On peut atteindre ces points en symétrisant par rapport à (ON). La seule impossibilité est de symétriser par rapport à (PM), car M est situé sur cette droite (et on n’aura pas de bande). Cela exclut O.
Tous les points sauf O sont atteignables.

3e cas : identique au précédent : on peut atteindre tous les points sauf P.

2.b)

1er cas : le point de départ D est distinct de M et N.
On peut raisonner en effectuant trois symétries successives du rectangle initial. La figure ci-dessous donne les images possibles du rectangle initial en se limitant à des symétries vers la droite ou vers le haut : les images possibles du rectangle OPMN sont $O_1P_1M_1N_1$, $O_2P_2M_2N_2$, $O_3P_3M_3N_3$ ou $O_4P_4M_4N_4$.
Le segment $[M_3N_3]$ est le translaté du segment [MN] par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM_2}$. Si D_3 est le translaté de D, on voit qu’il existe toujours une solution en trois bandes en visant le point D_3.

2e cas : le point D est égal à M ou à N.
Dans ce cas, il suffit de viser le point P (ou O). On revient au point de départ en trois bandes.

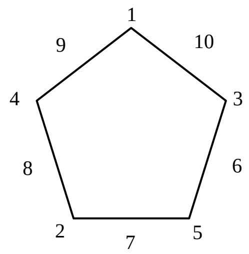


Exercice 3 - Académique – Autour d'un polygone

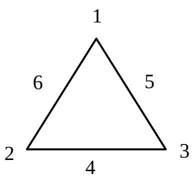
1.a)
La somme des nombres placés sur les cinq côtés est égale à $5S$. Elle est aussi égale à la somme de tous les entiers de 1 à 10, augmentée de celle des entiers placés sur les sommets (puisque ces derniers doivent être comptés deux fois).
On a : $1+2+...+10=55$, et la somme des entiers placés sur les sommets vaut au minimum $1+2+3+4+5=15$, et au maximum $6+7+8+9+10=40$.
D'où $55+15 \le 5S \le 55+40$. On en déduit $14 \le S \le 19$.

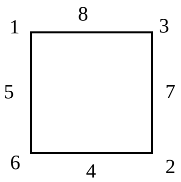
1.b)
On peut obtenir la valeur $S=14$ avec la configuration ci-contre.

La valeur 14 est donc la valeur minimale.



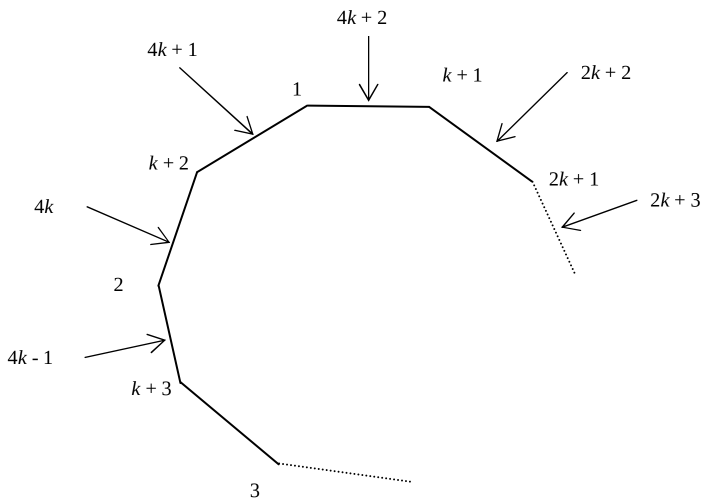
2.a) et b)
Par un raisonnement analogue au précédent, on trouve que :
a) Si $n=3$, on a $9 \le S \le 12$; b) si $n=4$, on a $11{,}5 \le S \le 15{,}5$.
Les minimums sont respectivement $S=3$ et $S=12$, atteints avec les configurations suivantes :





3.
En raisonnant comme en 1.a), on obtient :
$(1+...+2n)+(1+...+n) \le nS \le (1+...+2n)+(n+1+...+2n)$,
Soit $n(2n+1)+\dfrac{n(n+1)}{2} \le nS \le n(2n+1)+\left[n(2n+1)-\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$.
En simplifiant, on obtient : $\dfrac{5n+3}{2} \le S \le \dfrac{7n+3}{2}$.

4.
Si $n=2k+1$, le minimum théorique de S est $\dfrac{5(2k+1)+3}{2}=5k+4$.
On peut atteindre ce minimum en plaçant les entiers de 1 jusqu'à $2k+1$ en partant d'un sommet, et en sautant de deux en deux dans le même sens.
Puis on place les entiers de $2k+2$ jusqu'à $4k+2$ sur les côtés en tournant dans l'autre sens (figure suivante).



Exercice 4 - Académique Série S – Les trois cercles et l'ogive

1.a)
Dans le triangle AIE, rectangle en I, le théorème de Pythagore donne : $\mathrm{AE}^2 = r^2 + 24^2$.

1.b)
Les droites (AR) et (ER) sont perpendiculaires à la tangente commune en R au quart de cercle de centre A et au grand cercle, donc elles sont parallèles. Ayant le point R en commun, elles sont égales. On en déduit que les point A, E, R sont alignés.

1.c)
On a donc $\mathrm{AR} = 48$ (rayon du quart de cercle) et, d'après l'alignement : $\mathrm{AR} = \mathrm{AE} + \mathrm{ER} = \mathrm{AE} + r$.
On en déduit l'égalité $r^2 + 24 = \mathrm{AE}^2 = (48 - r)^2$.
En développant, il vient $96r = 48^2 - 24^2$, d'où $r = 18$.

2.
On démontre comme à la question 1 que les points A, T, G sont alignés, donc : $48 = \mathrm{AT} = \mathrm{AG} - \mathrm{GT} = \mathrm{AG} - t$.
D'autre part (théorème de Pythagore dans le triangle AIG) :
$\mathrm{AG}^2 = \mathrm{IG}^2 + \mathrm{AI}^2 = (48 - t)^2 + 24^2$.
On en tire : $(t + 48)^2 = (48 - t)^2 + 24^2$, d'où en développant : $192t = 24^2$.
Conclusion : $t = 3$.

3.a)
En adaptant le raisonnement de la question 1, on en déduit que :
- les points A, F, S_2 sont alignés, d'où $\mathrm{AF} + \mathrm{FS}_2 = \mathrm{AS}_2$, soit encore $\mathrm{AF} + s = 48$;
- les points B, S_1, F sont alignés, d'où $\mathrm{BS}_1 + \mathrm{S}_1\mathrm{F} = \mathrm{BF}$, soit encore $\mathrm{BF} - s = 48$.

3.b)
Dans le triangle rectangle AJF, on a $\mathrm{AF}^2 = \mathrm{AJ}^2 + s^2$.
Si la droite (JF) coupe (BC) en J', on a aussi : $\mathrm{BF}^2 = \mathrm{BJ}'^2 + (48 - s)^2$.
Compte tenu de ce que $\mathrm{AJ} = \mathrm{BJ}'$, on en déduit : $\mathrm{BF}^2 - \mathrm{AF}^2 = (48 - s)^2 - s^2$.
D'autre part $\mathrm{BF}^2 - \mathrm{AF}^2 = (\mathrm{BF} + \mathrm{AF})(\mathrm{BF} - \mathrm{AF}) = 96 \times 2s$, en utilisant les deux égalités du a).
Des deux expressions précédentes, on déduit : $(48 - s)^2 - s^2 = 192s$, d'où $s = 8$.