MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La deuxième de l'épreuve contient trois exercices. Elle est réalisée en équipe : une copie par équipe.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

PARTIE 2

Ce sujet comprend 5 pages celle-ci incluse.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Map monde

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 10. On décide de permuter les chiffres qui le composent de toutes les façons possibles, puis d'effectuer la moyenne de tous les nombres obtenus (n compris). Cette *Moyenne Arithmétique des Permutés de* n sera notée $MAP(n)$. Voici quelques exemples :

$$MAP(53) = \frac{53 + 35}{2} = 44\ ;\ MAP(20) = \frac{20 + 02}{2} = 11\ \ ;\ MAP(607) = \frac{607 + 670 + 706 + 760 + 067 + 076}{6} = 481$$

Si n contient plusieurs fois le même chiffre, certains de ses permutés sont identiques. Par exemple :

$$MAP(\mathbf{1}21) = \frac{\mathbf{1}21 + 1\mathbf{1}2 + 2\mathbf{1}1 + 21\mathbf{1} + 12\mathbf{1} + \mathbf{1}12}{6} = 148$$

L'entier n est dit :

- *à deux chiffres,* s'il est compris entre 10 et 99 ;
- *à trois chiffres*, s'il est compris entre 100 et 999, et ainsi de suite.

1. Calculer $MAP(51)$, $MAP(411)$ et $MAP(2020)$ en détaillant le raisonnement.

2.

a) Deux entiers différents peuvent-ils avoir la même MAP ?

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 10.

(i) Le nombre $MAP(n)$ est-il toujours un entier ?

(ii) Existe-t-il une règle concernant la parité de $MAP(n)$ en fonction de celle de n ?

c) Soient p et q deux entiers à deux chiffres. Est-il vrai que $MAP(p + q) = MAP(p) + MAP(q)$?

3. Dans cette question, soit n un entier supérieur ou égal à 10, de sorte que $MAP(n)$ soit un entier.

a) Si n est à trois chiffres, quelle est la plus petite valeur possible de $MAP(n)$? Et la plus grande ?

b) Les nombres n et $MAP(n)$ ont-ils toujours le même nombre de chiffres ?

c) Céline conjecture la proposition : « si n est à deux chiffres, alors $MAP(n)$ est un multiple de 11 ».

Qu'en pensez-vous ? Énoncer la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ou fausse ?

Indication : un entier m à deux chiffres peut toujours s'écrire sous la forme $m = 10d + u$ avec u le chiffre des unités et d celui des dizaines. Par exemple : $75 = 10\ \times 7 + 5$.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 10. On s'intéresse à l'équation $MAP(n) = n$.

a) Déterminer au moins trois solutions à quatre chiffres de cette équation.

b) Déterminer toutes les solutions à deux chiffres, puis à trois chiffres, de cette équation. Justifier.

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 10. On souhaite résoudre l'équation $MAP(n) = 2020$.

On dispose d'une fonction $permutes(n)$ qui renvoie, sous forme d'une liste, les permutés de n.

Par exemple, exécuter l'instruction $permutes(607)$ renvoie la liste [607; 670; 706; 760; 67; 76].

Les algorithmes suivants seront écrits en langage naturel, ou programmés dans le langage de votre choix.

a) Rédiger un algorithme qui, à la donnée de n, renvoie la moyenne de ses permutés.

b) Rédiger un algorithme permettant de résoudre l'équation $MAP(n) = 2020$.
<u>Remarque</u> : l'exécution du programme montre que cette équation n'a en fait pas de solution.

c) Expliquer un fonctionnement possible de la fonction $permutes(n)$ (schéma et/ou algorithme).

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Addition des cancres, suite de Farey et approximation

(sur une idée de R. Ferachoglou)

Les professeurs font parfois de curieuses opérations. En effet, dans son dernier contrôle, Émile a obtenu 9/12 à l'exercice 1 et 7/8 à l'exercice 2 ce qui lui fait un total de 16/20 alors que bien entendu, $\frac{9}{12}+\frac{7}{8}=\frac{13}{8}\neq\frac{16}{20}$.

Partie 1 : Addition des cancres

Dans ce problème, nous allons utiliser une nouvelle opération sur les fractions appelée « addition des cancres ». Elle consiste simplement à ajouter les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. On la note $\oplus$. Autrement dit, avec *a*, *b*, *c* et *d* des nombres entiers positifs (*b* et *d* non nuls), $\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

1. Calculer $\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{7}$ puis $\frac{7}{3}\oplus\frac{1}{5}$.

2. Montrer que si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b}<\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}<\frac{c}{d}$.

Partie 2 : Les suites de Farey

On appelle « suite de Farey d'ordre *n* » la liste, par ordre croissant, des fractions irréductibles comprises (au sens large) entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur ou égal à *n*. On la note F_n .

Par exemple, $F_1=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{1}\right)$; $F_2=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{1}\right)$ et $F_3=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{1}\right)$.

1. Écrire F_4 et F_5.

2.

a) Montrer que si $\frac{a}{b}$ est irréductible alors $\frac{b-a}{b}$ est irréductible.

b) En déduire que $\frac{1}{2}$ occupe la position médiane dans F_n. Autrement dit, montrer que si $\frac{a}{b}\in F_n$ alors $1-\frac{a}{b}\in F_n$ et que $\frac{1}{2}$ est bien situé entre ces deux fractions.

3.

a) À l'aide de l'addition des cancres, conjecturer une relation entre trois termes consécutifs quelconques d'une suite de Farey.

b) Vérifier la conjecture précédente pour F_5.

4.

a) Trouver la fraction avec le plus petit dénominateur possible comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

b) Même question avec $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$.

c) Que peut-on donc conjecturer à propos de la fraction de plus petit dénominateur possible comprise entre deux termes consécutifs d'une suite de Farey ?

5. En admettant la conjecture précédente et à partir de F_5, construire successivement F_6 et F_7.

6. Décrire la méthode qui permet d'obtenir F_{n+1} à partir de F_n.

Partie 3 : Approximation rationnelle d'un nombre réel

On considère un nombre réel x entre 0 et 1 que l'on souhaite encadrer par deux fractions de dénominateur au plus n.

1. Justifier que le meilleur encadrement est donné par deux fractions consécutives de F_n.

2. Voici un algorithme écrit dans le langage Python :

```
From math import sqrt

a=0
b=1
c=1
d=1
x=1/sqrt(2)

while b + d <= 100 :
    e = a + c
    f = b + d
    if (e/f) < x :
        a = e
        b = f
    else :
        c = e
        d = f

print(a,b,c,d)
```

Faire fonctionner cet algorithme et interpréter le résultat obtenu.

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

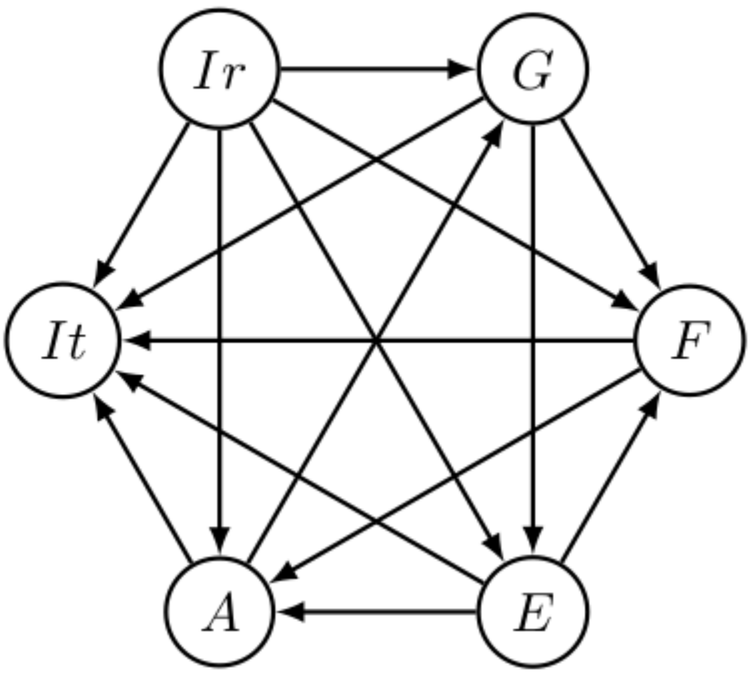
Le tournoi des six nations

Le Tournoi des Six Nations est un tournoi de rugby à XV, qui se déroule chaque année de février à mars. Seules six équipes sont autorisées à participer : les équipes d'Angleterre (A), d'Écosse (E), de France (F), du pays de Galles (G), d'Irlande (Ir) et d'Italie (It). Durant ce tournoi, chaque équipe affronte les cinq autres exactement une fois.

Il y a plusieurs termes pour désigner la performance globale d'une équipe durant le tournoi :

- on dit qu'une équipe réalise un **grand chelem** si elle remporte tous ses matches durant le tournoi ;
- on dit qu'une équipe *A* réalise un **mini chelem** si elle ne réalise pas un grand chelem et si pour chaque autre équipe *B*, soit *A* a battu *B*, soit *A* a battu une équipe ayant battu *B* ;
- on dit qu'une équipe remporte la **cuillère de bois** si elle a perdu tous ses matches.

1. Combien de matches sont disputés lors du tournoi des six nations ?
2. Le graphe ci-dessous présente les résultats du tournoi des six nations de l'année 2018. Une flèche d'une équipe vers une autre indique que la première a battu la seconde (par exemple la flèche de *A* vers *G* indique que l'Angleterre a battu le pays de Galles). Un match nul serait représenté par un trait en pointillés sans flèche.



   Une équipe a-t-elle réalisé un grand chelem en 2018 ? Un mini chelem ? Une cuillère de bois ?
3. Est-il possible qu'une équipe réalise un grand chelem et qu'une autre équipe réalise un mini chelem, dans la même édition du tournoi ?
4. Est-il possible que deux équipes réalisent un mini chelem durant le même tournoi ?
5. Au maximum, combien d'équipes peuvent réaliser un mini chelem durant le même tournoi ?
6. Montrer que, quand il n'y a pas de match nul, au moins une équipe réalise un mini chelem ou un grand chelem.