

Loi binomiale : exemple d'activité

Contexte pédagogique

Objectifs

- Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier les paramètres. Adapter les notations $\{X = k\}$, $\{X < k\}$, $P(X = k)$, $P(X < k)$ aux situations exposées, et faire les calculs correspondants.
- Être capable de mobiliser ses connaissances pour répondre à une question ouverte : la question 4, intitulée « recherche », et qui comporte 2 volets, n'indique pas la démarche à adopter pour chacune des questions posées.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

[Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012](#)

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Probabilités Variable aléatoire associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli.	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître et utiliser les notations $\{X = k\}$, $\{X < k\}$, $P(X = k)$, $P(X < k)$. 	Aucun développement théorique à propos de la notion de variable aléatoire n'est attendu.
Loi binomiale Loi binomiale $B(n,p)$.	<ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale et en identifier les paramètres. 	La notion de factorielle, les coefficients binomiaux et l'expression générale de $P(X = k)$ ne sont pas des attendus du programme. Pour introduire la loi binomiale, la représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. Pour $n \leq 4$, on peut ainsi dénombrer les chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions et calculer la probabilité d'obtenir k succès. ◇ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
	<ul style="list-style-type: none">• Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou du tableur.	Après cette mise en place, on utilise un tableur ou une calculatrice pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale.

Prérequis, capacités

- Savoir utiliser un tableur ou une calculatrice pour calculer directement des probabilités liées à la loi binomiale.

Les intentions

Après quelques calculs classiques sur la loi binomiale, l'élève est confronté à des situations rattachées à la vie d'une entreprise : commenter les remarques des responsables du conditionnement et du marketing, puis effectuer des recherches suggérées par les responsables de la qualité et de la production.

Selon les capacités des élèves en algorithmique, la dernière question où les recherches s'effectuent par tâtonnement, pourrait donner lieu à la mise en place d'algorithmes et de petits programmes.

Exemple d'activité

Une entreprise de produits bio fabrique, en très grande quantité, des gélules dont la masse est exprimée en milligrammes.

On admet que 4 % des gélules de ce type produites par l'entreprise ne sont pas acceptables pour la masse.

La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélèvement de N gélules à un tirage avec remise de N gélules.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de N gélules, associe le nombre de gélules non acceptables pour la masse. **Sauf indication particulière, les résultats seront arrondis au millième.**

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Dans cette question, on prend $N = 10$.
 - 2.A. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 gélules, une gélule et une seule ne soit pas acceptable pour la masse.

$$P(Y = 1) \approx 0,277$$

- 2.B. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 gélules, une gélule au moins ne soit pas acceptable pour la masse.

$$P(Y \geq 1) \approx 0,335$$

- 2.C. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 gélules, il y ait strictement moins de 4 gélules qui ne soient pas acceptables pour la masse. (arrondir au dix millième).

$$P(Y < 4) \approx 0,9996$$

3. Commentaires de différents responsables dans l'entreprise.

3.A. Commenter la remarque du responsable du conditionnement dans cette entreprise qui dit : « avec un taux de non-conformité de 4 % par gélule, si nous conditionnons les gélules par sachet de 10, nous aurons moins de 70 % de nos sachets qui ne comporteront que des gélules acceptables ».

Il a raison car $P(X = 0) \approx 0,665$

3.B. Commenter la remarque du responsable marketing dans cette entreprise qui dit : « avec un taux de non-conformité de 4 % par gélule, si nous conditionnons les gélules par sachet de 10, nous aurons au moins 95 % de nos sachets qui comporteront 9 ou 10 gélules conformes ».

Il n'a pas mathématiquement raison car $P(X \leq 1) \approx 0,942$

4. Recherche.

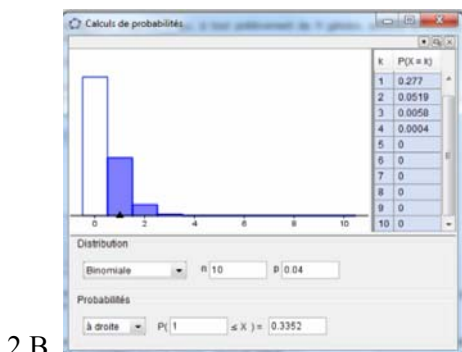
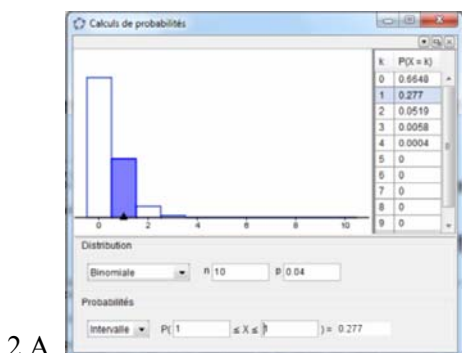
4.A. Le responsable de la qualité dans l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir que des gélules acceptables au sein d'un sachet de 10 soit supérieure ou égale à 0,8. Quel doit être le taux de non-conformité maximum par gélule pour pouvoir atteindre cet objectif ?

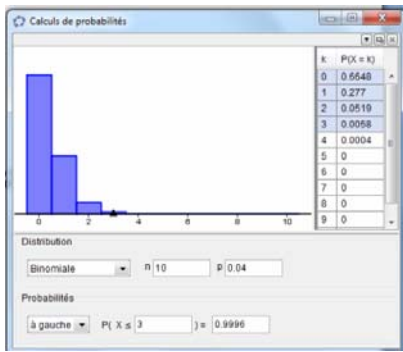
Par essais successifs sur la valeur de p on obtient $p \approx 0,022$

4.B. Après différentes tentatives, le responsable de la production constate qu'il n'est pas possible avec le système actuel d'améliorer le taux de non-conformité, qui reste donc fixé à 4 %. Quel doit alors être l'effectif maximum N du conditionnement en sachets pour que la probabilité de n'avoir que des gélules acceptables au sein d'un sachet de N soit supérieure ou égale à 0,8 ?

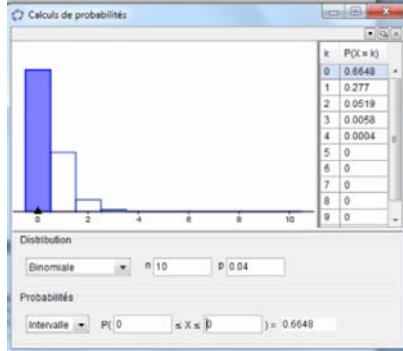
Par essais successifs sur la valeur de N on obtient $N = 5$.

Annexe – Utilisation du logiciel Géogebra pour obtenir les réponses aux différentes questions

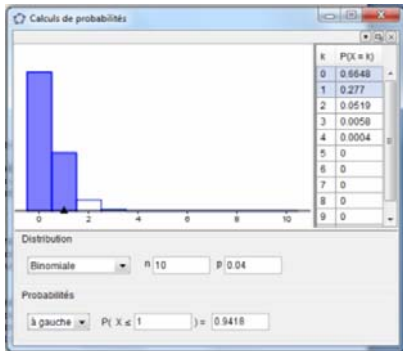




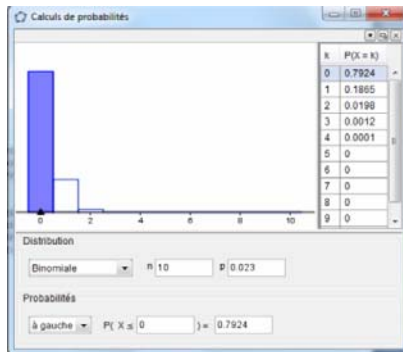
2.C.



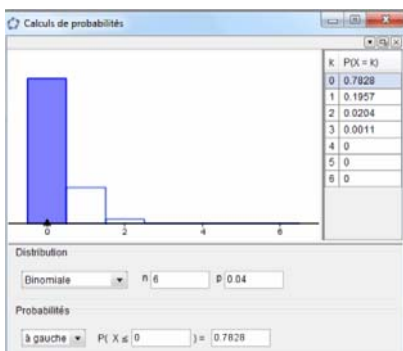
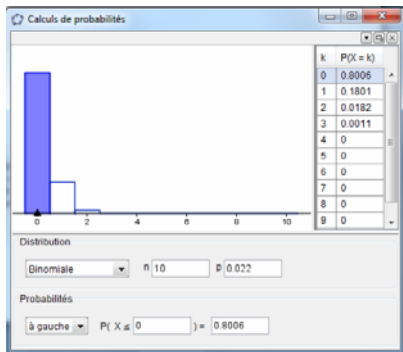
3.A.



3.B.



4.A.



4.B.

