Tutoriel propriétés élémentaires de la transformée de Fourier discrète avec Xcas

1. Introduction

Ce document complète le tutoriel **Transformée de Fourier discrète.** Il explique comment implanter soi-même puis avec la fonction ad-hoc de Xcas, une transformée de Fourier discrète. Il en explore ensuite les principales propriétés mathématiques en les illustrant d'exemples. Xcas doit être utilisé avec la version 1.1.3 ou une version ultérieure.

On notera indifféremment ω ou w la racine $n$ième de l'unité définie par $\omega = e^{i.\frac{2\pi}{n}}$, $n \geq 2$ entier naturel. On rappelle que la transformée de Fourier discrète (TFD) d'une séquence $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de nombres complexes est la séquence $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ définie par : $X_l = \sum_{k=0}^{n-1} x_k . \omega^{-k.l}$ pour l entre 0 et $n-1$.

2. Mise en œuvre d'une transformée discrète (TFD)

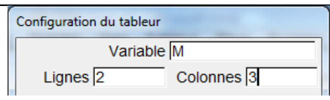
Une TFD transforme linéairement une séquence de n nombres en une nouvelle séquence de même taille. L'opération peut donc se coder à l'aide d'une matrice - dite de TFD - agissant sur le vecteur $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ et renvoyant le vecteur $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$. La matrice de TFD a pour coefficient (k, l) le nombre $\omega^{-k.l}$.

Quelques commandes Xcas utiles pour créer et manipuler les matrices

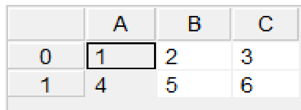
On peut créer une matrice sous Xcas en explicitant ses coefficients, la virgule faisant office de séparateur entre les lignes, une matrice est une liste de lignes, les indices commencent à zéro; ainsi :

```
M:=[[1,2,3],[4,5,6]]
```

crée une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. `M[1,2]` retourne le nombre 6.

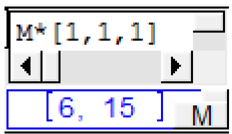


Pour saisir les coefficients d'une matrice, il est plus pratique d'utiliser le tableur, on ouvre une feuille de calcul dans le menu Tableur/Nouveau tableur, ou plus rapidement avec Alt+t. Dans le champ Variable, on donne le nom de la matrice puis on remplit les coefficients avec le pavé numérique ou, à défaut, en verrouillant la touche de majuscules. Avec la syntaxe M*v, appliquer la matrice M à la matrice colonne `[[1],[1],[1]]` a un sens, à la matrice ligne `[[1,1,1]]` n'en a pas.



En pratique on définit un vecteur par une liste : un vecteur peut être défini en ligne comme : v:=[1,1,1]. (ne pas confondre avec une matrice ligne)

Xcas accepte alors l'écriture simplifiée M*[1,1,1] plus légère qu'avec une matrice colonne, et retourne logiquement un vecteur écrit en ligne.



Voir le fichier : TFD2 Exemples_Matrices.xws

On peut définir une matrice de taille donnée :

```
M:=matrix(2,3)
```

Cette instruction produit une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, dont les coefficients sont

initialisés à 0. On peut aussi définir les coefficients d'une matrice par une formule : R:= matrix (5,5,(l,c)->l+c) ; Donne une matrice dont les coefficients valent la somme du numéro de la ligne et du numéro de la colonne. X :=seq(0,k,1,5) ; donne un vecteur ligne de 5 zéros. On peut concaténer deux vecteurs lignes avec concat : v1 := [1 ,2,3] ; v2 := [4 ,5] ; v:=concat(v1,v2) donnera le vecteur ligne : [1,2,3,4,5]	

Activité :

1. Construire la matrice de TFD quand $n = 5$.

2. L'appliquer à $\boldsymbol{x} = [\mathbf{1}\,,\mathbf{2}\,,\mathbf{3}\,,\mathbf{4}\,,\mathbf{5}]$. Comparer au résultat obtenu à l'aide de la fonction `fft`.

3. Border $\boldsymbol{x}$ de 5 zéros et former $= [\mathbf{1}\,,\mathbf{2}\,,\mathbf{3}\,,\mathbf{4}\,,\mathbf{5}\,,\mathbf{0}\,,\mathbf{0}\,,\mathbf{0}\,,\mathbf{0}\,,\mathbf{0}]$. Lui appliquer la TFD avec $n = 10$. C'est un procédé connu sous le nom de *Zero padding.* Que constate-t-on ?

4. Dupliquer $\boldsymbol{x}$, former $\boldsymbol{x2} = [\mathbf{1}\,,\mathbf{2}\,,\mathbf{3}\,,\mathbf{4}\,,\mathbf{5}\,,\mathbf{1}\,,\mathbf{2}\,,\mathbf{3}\,,\mathbf{4}\,,\mathbf{5}]$, lui appliquer la TFD. Que constate-t-on ?

Exercices 1 et 2 :

On construit la matrice M de TFD en imbriquant deux boucles inconditionnelles :

```
M:= matrix(5,5);
w:= exp(i*2*pi/5);
pour l de 0 jusque 4  faire
    pour c de 0 jusque 4 faire
         M[l,c]:=w^(-l*c);
    fpour;
fpour;
```

Ou plus directement :

```
w:= exp(i*2*pi/5);
M:=matrix(5,5,(l,c)->w^(-l*c)) ;
```

Remarque : autant que possible, Xcas fait des calculs exacts. Lorsque les données numériques sont nombreuses, par souci d'efficacité on pourra passer en calcul décimal en l'imposant : w :=evalf(`exp(i*2*pi/5));`

On applique la matrice M au vecteur x :

```
x:=[1,2,3,4,5];
M*x;
```

On obtient :

```
[15.0,-2.5+3.44095480118*i,-2.5+0.812299240582*i,-2.5-0.812299240582*i,-2.5-3.44095480118*i]
```

L'algorithme de FFT implémente un calcul optimisé de la TFD. La fonction clé-en-main `fft` renvoie effectivement le même résultat :

```
fft(x);
```

Exercices 2 et 3 :

On définit un vecteur nul, on le juxtapose au vecteur x, on en forme la TFD (de taille 10) :

```
z := seq(0,k,1,5) ;  x1 := concat(x,z) ; fft(x1) ;
On obtient après transposition en colonne:
   15.
 - 1.736068 - 10.771892i
 - 2.5 + 3.4409548i
   2.736068 - 2.5428988i
 - 2.5 + 0.8122992i
   3.
 - 2.5 - 0.8122992i
   2.736068 + 2.5428988i
 - 2.5 - 3.4409548i
 - 1.736068 + 10.771892i
```

Une valeur sur deux vient de la TFD du vecteur tronqué à 5 coordonnées. Le *Zero Padding* temporel interpole la TFD en fréquence

On réplique le vecteur x, on forme la TFD (de taille 10)

```
x2 := concat(x,x) ; fft(x2) ;
On obtient :
       30.
       0
     - 5. + 6.8819096i
       0
     - 5. + 1.6245985i
       0
     - 5. - 1.6245985i
       0
     - 5. - 6.8819096i
       0
```

Une valeur sur deux vient de la TFD du vecteur tronqué à 5 coordonnées (au coefficient multiplicatif 2 près). Les autres sont nulles.

3. Propriétés mathématiques élémentaires de la transformée de Fourier discrète (TFD)

Propriété : la TFD est un opérateur linéaire. Autrement dit, pour $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ et $(x'_0, x'_1, \dots, x'_{n-1})$ deux vecteurs complexes et a et b deux complexes, on a : $\mathrm{TFD}((ax_k + bx'_k))$ = $a\mathrm{TFD}((x_k))$ + $b\mathrm{TFD}((x'_k))$

La transformée de Fourier discrète inverse (TFD^{-1}) d'une séquence $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ de nombres complexes est la séquence $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$ définie par : $\tilde{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} X_l \,.\, \omega^{+k.l}$ pour k entre 0 et $n-1$.

Propriété : la transformée de Fourier est réversible. Précisément, on a : $(x_k) = (\widetilde{(\tilde{x}_k)}) = \mathrm{TFD}^{-1}(\mathrm{TFD}((x_k)))$

Activité :

1. Démontrer cette dernière propriété pour la séquence [1 ,0 ,0 , … ,0]. Comment s'en déduirait le résultat général ?

2. Vérifier la propriété sur la séquence [1, 2 , 3 , 4 , 5] avec le logiciel.

$x_k = 1$ si $k = 0.0$ sinon

Exercice 1. On calcule $X_l = \sum_{k=0}^{n-1} x_k . \omega^{-k.l}$ pour l entre 0 et $n-1$. Par suite $\tilde{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{k.l}$. La somme est en progression géométrique de raison ω^k. Elle est nulle quand $k \neq 0$ puisque $\left(\omega^k\right)^n = 1$, égale à 1 quand $k = 0$. La formule de réciprocité est ici établie. On procède de même avec les séquences [0 ,1 ,0 ,…0] ; [0 ,0 ,1 ,0 ,… ,0] ; … ; [0 ,0 ,… ,0 ,1]. On conclut par linéarité d'une somme.

Exercice 2. La vérification est aisée :

```
ifft(fft([1,2,3,4,5]))
on obtient :
    [1.0,2.0,3.0,4.0,5.0]
```

Propriété : $\overline{\mathrm{TFD}}\big((\bar{x}_k)\big) = n.\mathrm{TFD}^{-1}((x_k))$.

Propriété (formule de Bessel) : $\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2 = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}|X_l|^2$

Activité : vérifier la formule de Bessel sur la séquence [1 ,2 ,3 ,4 ,5]. En rappeler l'interprétation temps-fréquence

Ici encore, la vérification est aisée. La somme de gauche provient du produit de la matrice ligne transconjuguée de x et de la matrice colonne x. Celle de droite se traite à l'avenant. D'où les instructions :

```
x*conj(tran(x))
on obtient :
    [55]
X := fft(x) ; 1/5*X*conj(tran(X)
donne aussi
    [55]
```

On tranpose, puis on conjugue pour obtenir la somme des carrés des modules

La formule de Bessel donne deux moyens d'accéder à l'énergie d'une séquence, l'un en restant dans le domaine des temps, l'autre en utilisant celui des fréquences.

La formule qui suit met en évidence l'effet d'un décalage fréquentiel (circulaire) : pour obtenir la séquence $(X_{n-1}, X_0, \dots, X_{n-2})$ au lieu de la séquence $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ il faut calculer la transformée Fourier discrète de $(x_0, x_1.\omega, x_2.\omega^2, \dots, x_{n-1}.\omega^{n-1})$ au lieu de celle de $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. On constate un phénomène voisin lors d'une transposition analogique, à ceci près que le décalage n'est pas circulaire. Énonçons :

Propriété : $\mathrm{TFD}(x_0, x_1.\omega, \dots, x_{n-1}.\omega^{n-1}) = (X_{n-1}, X_0, \dots, X_{n-2})$ où $\omega = e^{i.\frac{2\pi}{n}}$.

Activité :

1. **Vérifier cette formule sur la séquence [1 ,2 ,3 ,4 ,5]**
2. **Comment faire tourner (sur elle-même) la séquence des X_k dans l'autre sens ?**
3. **Déterminer la TFD de la séquence [5 ,1 ,2 ,3 ,4]. Le résultat obtenu était-il prévisible ?**

Exercice 1. Observons la rotation de la transformée de Fourier :

```
w:= exp(i*2*pi/5);
u:=[1 ,w ,w^2 ,w^3 ,w^4] ; fft(x .* u);
On obtient
[-2.5-3.44095480118*i
 15.0
 -2.5+3.44095480118*i
 -2.5+0.812299240582*i
 -2.5-0.812299240582*i]
```

L'opérateur .* multiplie coordonnées à coordonnées les vecteurs x et u

Exercice 2. En répétant l'opération une nouvelle fois, c'est-à-dire en multipliant point à point [1 ,2 ,3 ,4 ,5] par $[1 , \omega , \omega^2 , \omega^3 , \omega^4]$ et encore par ce même $[1 , \omega , \omega^2 , \omega^3 , \omega^4]$, on fera tourner deux fois la transformée. En faisant cela 4 fois, on décale la transformée 4 fois d'un rang vers la droite, donc d'un rang vers la gauche. Bref, on aura ainsi multiplié [1 ,2 ,3 ,4 ,5] par $[1 , \omega^4 , (\omega^2)^4 , (\omega^3)^4 , (\omega^4)^4]$. Or $\left(\omega^k\right)^4 = (\omega^4)^k = (\omega^{-1})^k = \omega^{-k}$. Conclusion générale : pour faire tourner la transformée d'un cran vers la gauche, on multiplie point à point la séquence de départ par $[1 , \omega^{-1} , \omega^{-2} , \omega^{-3} ,\ldots, \omega^{-(n-1)}]$,

Exercice 3. Interrogeons Xcas :

```
fft([5 ,1 ,2 ,3 ,4])
[15.0
2.5+3.44095480118*i
2.5+0.812299240582*i
2.5-0.812299240582*i
2.5-3.44095480118*i].
```

La transformée a été déphasée linéairement, ici elle a été multipliée point à point par $(1 ; \omega^{-1} ; \omega^{-2} ; \omega^{-3} ; \omega^{-4})$,

Le résultat observé était en partie prévisible, en commençant par interpréter la séquence [5 ,1 ,2 ,3 ,4] comme la décalée de la transformée inverse de la transformée [1 ,2 ,3 ,4 ,5] .

4. Convolution périodique (ou circulaire) et transformée de Fourier discrète

Soit la séquence $x = (x_0, x_1, \ldots , x_{n-1})$ de taille n. On souhaite la filtrer, c'est-à-dire la convoluer[1], par la séquence de même taille $h = (h_0, h_1, \ldots , h_{n-1})$[2]. Pour simplifier[3], on considérera que cette seconde séquence ne comporte que trois coefficients significatifs : h_0, h_1, h_2, les suivants étant nuls.

La convolution *apériodique* de x par h génère la séquence $y = x * h$ de taille $n + 2$ définie par :

$y_0 = x_0.h_0$ — Phase de mise en route du processus

$y_1 = x_1.h_0 + x_0.h_1$

$y_2 = x_2.h_0 + x_1.h_1 + x_0.h_2$

$y_3 = x_3.h_0 + x_2.h_1 + x_1.h_2$ — Plein régime

….

$y_{n-1} = x_{n-1}.h_0 + x_{n-2}.h_1 + x_{n-3}.h_2$

$y_n = x_{n-1}.h_1 + x_{n-2}.h_2$

$y_{n+1} = x_{n-1}.h_2$ — Extinction du processus

Notons qu'on réalise les mêmes calculs quand on multiplie les polynômes $x_0 + x_1X + x_2X^2 + \cdots + x_{n-1}X^{n-1}$ et $h_2X^2 + h_1X + h_0$.

La convolution *périodique* de x par h produit, elle, la séquence $\tilde{y} = x \otimes h$ de taille n définie par :

$\tilde{y}_0 = x_0.h_0 + x_{n-1}.h_1 + x_{n-2}.h_2$

$\tilde{y}_1 = x_1.h_0 + x_0.h_1 + x_{n-1}.h_2$

$\tilde{y}_2 = x_2.h_0 + x_1.h_1 + x_0.h_2$

$\tilde{y}_3 = x_3.h_0 + x_2.h_1 + x_1.h_2$

….

[1] Il s'agit ici d'une convolution *apériodique*

[2] La séquence $(h_0, h_1, \ldots , h_{n-1})$ s'appelle la réponse impulsionnelle du filtre

[3] Tout ceci se prête à généralisation

$\tilde{y}_{n-1} = x_{n-1}.h_0 + x_{n-2}.h_1 + x_{n-3}.h_2$

Notons qu'on réalise les mêmes calculs en écrivant les nombres $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sur un anneau ; les nombres h_2, h_1, h_0 sur un autre ; en « enfilant » les deux anneaux, en faisant tourner l'un par rapport à l'autre et en multipliant les termes en phase.

Les termes d'indices 2 à $n-1$ des suites y et $\tilde{y}$ sont identiques. Cette heureuse coïncidence est à la base de la méthode de filtrage dite d'*Overlap and Save.*

Propriété : $x \otimes h = TFD^{-1}\big(TFD(x) .* TFD(h)\big)$

Comprendre un produit coordonnée à coordonnée

Activité :

1. Valider cette formule avec les séquences [1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10] et [1 ,0,5 ,0,1 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0]

2. Notez-vous une différence entre $\boldsymbol{x \otimes h}$ et $\boldsymbol{h \otimes x}$? Était-ce prévisible ? On parle de commutativité.

3. Notez-vous une différence entre $\boldsymbol{(x \otimes h) \otimes h}$ et $\boldsymbol{x \otimes (h \otimes h)}$? Était-ce prévisible ? On parle d'associativité.

Exercice 1. Les commandes Xcas sont très simples :

```
X:=[1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10]; h :=[1,0.5,0.1,0,0,0,0,0,0,0];
 (ifft(fft(x).*fft(h));
On obtient :

    6.9    3.5    4.1    5.7    7.3    8.9    10.5    12.1    13.7    15.3
```

La phase de mise en route une fois passée, on obtient les résultats attendus. Par exemple :
$y_2 = 3 \times 1 + 2 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}1 = 4.1 = \tilde{y}_2$

Exercices 2 et 3. On ne note aucune différence. Cela tient, entre autre, à ce que ifft($X.* H$)=ifft($H.* X$) où X =fft(x) et H =fft(h), puisque $X.* H = H.* X$.

L'équipe qui a rédigé ce document ressource était composée de :

Cabane Robert, IGEN, groupe des mathématiques

Dubouloz Georges, IA-IPR de mathématiques, académie de Grenoble

Fleurant Sandrine, IA-IPR de mathématiques, académie de Nantes

Zayana Karim, IGEN, groupe des mathématiques

Avec la participation de Bernard Parisse de l'université Joseph Fourier de Grenoble