

# Autour de la transformée en Z : filtre numérique dans un égaliseur graphique

## 1. Introduction

La ressource présentée ici poursuit principalement deux objectifs :

- *travailler en contexte le module « Transformée en Z »* au travers de deux focales *a priori* distinctes mais au final fortement complémentaires : la première focale est liée à un point de vue plus « mathématicien », la seconde à un point de vue plus « électronicien » ;
- *illustrer quelques grands axes des nouveaux programmes de STS*, dont notamment :
  - i) l'utilisation des outils logiciels (dont ceux relatifs au calcul formel et à l'algorithmique),
  - ii) l'exploitation de situations contextualisées issues des autres disciplines scientifiques et technologiques,
  - iii) l'étude d'une même situation sous un angle continu puis sous un angle discret (ou vice-versa),
  - iv) l'importance des représentations graphiques.

Hormis cette introduction, cette ressource est constituée de trois parties distinctes :

- la **partie 2.** est consacrée à quelques éléments de base sur les filtres et vise uniquement à appréhender au mieux les parties suivantes ;
- la **partie 3.** est l'étude d'une situation contextualisée (le rôle joué par un filtre numérique dans un égaliseur graphique) et a été rédigée sous la forme d'un problème. L'énoncé proposé ici n'a aucune valeur normative et vise uniquement à contribuer à la réflexion des enseignants de mathématiques intervenant en STS : il peut naturellement être utilisé, modifié et complété ;
- la **partie 4.** est constituée d'éléments de correction et de quelques éclairages sur le problème proposé à la **partie 3.**

## 2. Quelques éléments sur les filtres

En électronique, le terme « filtre » désigne, par analogie avec les filtres de fluides (filtre à air, filtre à huile,...), un circuit qui rejette une partie indésirable du signal. Un filtre agit sur des signaux électriques (tensions et/ou courants) dont il modifie certaines caractéristiques. Autrement dit, et de manière simplifiée, il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres.

Un filtre linéaire est entièrement défini par sa réponse impulsionnelle, sa fonction de transfert, ou sa réponse en fréquence. On dispose d'outils pour passer de l'une à l'autre de ces représentations.

La réponse en fréquence caractérise la sortie du filtre excité par un signal d'entrée de fréquence donnée  $f$  ou de pulsation donnée  $\omega = 2\pi f$ . Un filtre linéaire renverra un signal de même fréquence, mais amplifié ou atténué, et éventuellement retardé<sup>1</sup>. Voici les caractéristiques des quatre principaux types de filtres :

<sup>1</sup> On dit aussi « déphasé ».

- *filtre passe-haut* : il ne laisse passer que les fréquences au-dessus d'une fréquence déterminée, appelée « fréquence de coupure ». Il atténue les autres fréquences (les basses fréquences). C'est un atténuateur de graves pour un signal audio.
- *filtre passe-bas* : il ne laisse passer que les fréquences en dessous de sa fréquence de coupure. C'est un atténuateur d'aiguës pour un signal audio.
- *filtre passe-bande* : il ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquences (et atténue tout ce qui est au-dessus ou en dessous). Il est très utilisé dans les récepteurs radio et TV pour isoler le signal que l'on désire capter.
- *filtre réjecteur de bande* (aussi appelé filtre coupe-bande) : il est le complémentaire du passe-bande. Il atténue une plage de fréquences. Cela peut être utile pour diminuer certains parasites par exemple.

Les mathématiciens ont proposé des formules pour la conception de ces filtres en fonction du comportement désiré (filtre de Bessel, de Butterworth, de Tchebychev, de Kalman,...). Des méthodes évitent ou simplifient les calculs pour approcher le fonctionnement des filtres : transformée de Laplace pour les filtres continus, transformée en  $Z$  pour les filtres numériques et diagramme de Bode pour évaluer la réponse en fréquence.

Le problème proposé dans la **partie 3**, étudie le comportement d'un filtre par sa fonction de transfert  $H(z)$  (en électronique numérique, on note habituellement  $H(z)$ , et non  $H$ , la fonction de transfert numérique). Pour voir le comportement sur la réponse en fréquence, on exploite  $H(e^{j\omega T_e})$  où  $T_e$  désigne la période d'échantillonnage. Pour simplifier l'étude, on étudie uniquement l'effet du filtre sur l'amplitude du signal. On se concentre donc sur le module de la réponse en fréquence :  $|H(e^{j\omega T_e})|$  (et on ne mène pas de travail spécifique sur son argument).

### 3. Étude d'une situation contextualisée (le rôle joué par un filtre numérique dans un égaliseur graphique)

Une source sonore est composée d'une multitude d'ondes sonores réparties sur un large spectre de fréquences audio. Il est intéressant d'isoler certaines bandes de fréquences afin de leur appliquer un traitement spécifique. On peut alors atténuer ou renforcer le timbre d'un son donné dans les graves, les médiums ou les aiguës.

À la différence des correcteurs installés dans les amplificateurs hi-fi, les autoradios ou les téléviseurs, les égaliseurs interviennent sur des bandes de fréquences bien précises et permettent de renforcer certaines fréquences sans trop générer de nuisances. Les égaliseurs professionnels les plus perfectionnés peuvent isoler et traiter des bandes de fréquences très étroites, ce qui permet par exemple, d'atténuer ou de renforcer la « présence » d'un instrument de musique ou d'une voix. Ces égaliseurs sont dits « graphiques » car un écran (souvent en couleurs, photographie ci-contre) aide à visualiser l'effet désiré et obtenu sur toute la gamme des fréquences : des plus basses (à gauche) aux plus hautes (à droite).



*Égaliseur professionnel*



*Visualisation graphique de l'amplification en fonction des différentes bandes de fréquence*

<sup>2</sup> On note ici  $j$  le complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ , comme c'est l'usage en physique et en sciences de l'ingénieur.

### 3.1. Rôle d'un filtre numérique dans un égaliseur

Aujourd'hui, la majorité des appareils audio utilisent des filtres numériques qui permettent de nombreux traitements du son. Dans cette section, on s'intéresse à un filtre implanté dans le processeur d'un égaliseur. On note  $T_e$  la période d'échantillonnage (exprimée en secondes).

Pour tout entier relatif  $n$ , on note  $e_n$  l'entrée du filtre et  $s_n$  la sortie du filtre à l'instant d'échantillonnage  $nT_e$ . On suppose que le signal d'entrée est un échelon (si  $n < 0$ ,  $e_n = 0$  et si  $n \geq 0$ ,  $e_n = 1$ ) et on considère que pour  $n < 0$ ,  $s_n = 0$ . On dispose de la relation de récurrence du filtre implantée dans le processeur :

$$\text{pour tout entier relatif } n, \quad s_n = K(e_n + ae_{n-1} + be_{n-2}) - cs_{n-1} - ds_{n-2}$$

où  $K, a, b, c$ , et  $d$  sont des constantes réelles. Cette équation traduit la présence d'un feedback : le système est bouclé (la sortie  $s_n$  dépend non seulement de l'entrée mais aussi des deux états antérieurs  $s_{n-1}$  et  $s_{n-2}$ ).

a. Exprimer  $s_0, s_1$  et  $s_2$  en fonction des coefficients  $K, a, b, c$ , et  $d$ .

Dans ce qui suit, on prend<sup>3</sup>  $T_e = \frac{1}{9600}$  s;  $K = 0,1125$ ;  $a = -0,8437$ ;  $b = 1$ ;  $c = -1,5265$  et  $d = 0,6724$ .

b. En utilisant un logiciel adapté, déterminer la valeur arrondie à  $10^{-3}$  de  $s_n$  pour tout entier naturel  $n$  compris entre 0 et 100 puis tracer le nuage de points de coordonnées  $(nT_e, s_n)$  dans un repère orthogonal aux unités adaptées. Que peut-on conjecturer sur la limite  $\ell$  de la suite  $(s_n)$  ?

c. On note  $E(z)$  et  $S(z)$  les transformées en  $Z$  respectives de  $(e_n)$  et  $(s_n)$ .

i) Déterminer une expression de la fonction de transfert  $H$  du filtre définie par  $H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$ .

ii) En déduire une expression de  $S(z)$ .

iii) L'expression obtenue à la question ii) permet-elle d'obtenir une expression explicite de  $s_n$  pour tout entier naturel  $n$  ? Argumenter.

iv) - En utilisant l'expression obtenue à la question ii), confirmer ou infirmer la conjecture de la question b. sur la limite  $\ell$  de la suite  $(s_n)$ .

- La suite  $(s_n)$  admettant  $\ell$  pour limite, il existe alors un seuil  $N$  à partir duquel  $|s_n - \ell| \leq 10^{-4}$ . Conjecturer la valeur de  $N$  en employant le tableur puis en exploitant un algorithme.

d. Il est intéressant de connaître le comportement en fréquence d'un filtre, et ainsi de savoir quels sons seront supprimés par l'égaliseur.

i) Pour une pulsation  $\omega$  donnée du signal d'entrée, déterminer une expression de  $H(e^{j\omega T_e})$ . On rappelle qu'il s'agit de poser  $z = e^{j\omega T_e}$  dans l'expression obtenue à la question c.i).

ii) En utilisant un logiciel de calcul formel, en déduire une expression de  $\left| H\left(e^{j2\pi\frac{\omega}{\omega_e}}\right) \right|$ , où  $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$ .

iii) À partir de l'expression précédente, répondre alors aux questions suivantes. Toute latitude est laissée sur la démarche, graphique ou analytique, ainsi que sur l'emploi d'outils logiciels.  
- En prenant  $\frac{\omega}{\omega_e}$  dans l'intervalle  $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ <sup>4</sup>, déterminer le type de filtre ici implanté : passe-bas, passe-bande ou passe-haut. En quoi était-ce en partie prévisible à la seule vue des coefficients ?

<sup>3</sup> La section 3.2. du problème reviendra sur la question de la détermination des valeurs des coefficients dans une telle relation de récurrence. Une fréquence d'échantillonnage de 9 600 Hz assure un rendu correct de la voix, en couvrant la bande  $[0 \text{ Hz}; 4 800 \text{ Hz}]$  (condition de Nyquist-Shannon).

<sup>4</sup> On évite  $\omega = 0$  pour éviter  $z = 1$ , qui annule le dénominateur de  $H(z)$ .

- Le gain maximal  $G_{max}$  du filtre est égal au maximum de la fonction  $\frac{\omega}{\omega_e} \rightarrow \left| H \left( e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \right) \right|$ . Estimer alors le gain maximal du filtre et la valeur de la pulsation réduite  $\frac{\omega}{\omega_e}$  pour laquelle on l'obtient. Quelle est la fréquence  $f_M$  correspondant à la pulsation  $\omega_M$  ainsi déterminée ? Interpréter le résultat.

- La ou les pulsations de coupure du filtre sont les valeurs de  $\omega$  telles que :

$$\left| H \left( e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{max}$$

Déterminer la ou les pulsations de coupure, puis la ou les fréquences de coupure correspondantes.

(En électronique, on considère qu'à partir de la ou des fréquences correspondant aux pulsations de coupure, le filtre ne laisse plus « passer les fréquences », même si cela est naturellement progressif dans la réalité.)

Dans la **section 3.1.** on s'est intéressé au comportement du filtre implanté. C'est une première approche, notamment intéressante mathématiquement, mais cela ne permet pas à l'électronicien de concevoir le filtrage qu'il souhaite.

Dans la **section 3.2.** on va suivre la démarche de conception qui permet, à partir d'un gabarit fréquentiel (comportement en fréquence du filtre analogique souhaité), de trouver la relation de récurrence à implanter dans le calculateur numérique. Cette deuxième approche est notamment intéressante du point de vue des enseignements technologiques.

### 3.2. Élaboration d'un filtre numérique dans un égaliseur

Dans cette section, on va suivre la démarche du concepteur du filtre sur un cas d'école. Il s'agit ici de déterminer la relation de récurrence à implanter afin de réaliser un filtre passe-bande de fréquence centrale  $f_0$  et dont le coefficient de largeur de bande  $B$  est égal à  $\alpha = 1,4$ , c'est-à-dire dont la largeur de bande  $B$  (différence entre la fréquence de coupure haute et la fréquence de coupure basse) est égale à  $1,4f_0$ .

Les étapes successives de la conception d'un tel filtre sont les suivantes :

- *choix du type de filtre en fonction du comportement souhaité* : ici, on choisit un filtre de Butterworth, c'est-à-dire un filtre linéaire dont la caractéristique principale est d'avoir un gain aussi constant que possible dans la bande passante.

- *choix de l'ordre du filtre en fonction de la sélectivité souhaitée* : ici, on se limite à un filtre d'ordre 2. On part alors d'un prototype qui est un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 2. La fonction de transfert réduite d'un tel filtre dans le domaine analogique est définie par  $H(s) = \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$ .

- *passage à un filtre passe-bande* : la fonction de transfert du filtre passe-bande est alors définie par  $H_1(s) = H\left(\frac{1}{\alpha}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right)$ .

- *intégration de la fréquence centrale  $f_0$  correspondant à la pulsation  $\omega_0$*  : les étapes précédentes ayant été faites en utilisant implicitement  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , on intègre cette pulsation « centrale » par la transformation  $H_2(p) = H_1\left(\frac{p}{\omega_0}\right)$ . On souhaite avoir  $f_0 = 1\text{kHz}$ , soit  $\omega_0 = 2000\pi\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

- *passage de l'analogique au numérique* : on approche la fonction de transfert analogique  $H_2$  par la fonction de transfert numérique, c'est-à-dire  $H_3$  définie par  $H_3(z) = H_2\left(\frac{2}{T_e} \times \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$ <sup>5</sup>. Cette méthode

<sup>5</sup> En effet, pour  $\omega \ll \omega_e$ ,  $\frac{2}{T_e} \times \frac{1 - e^{-j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}}}{1 + e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}}} \approx \frac{4j\pi}{T_e} \frac{\omega}{2\omega_e} = j\omega$ , et donc  $H_3\left(e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}}\right) \approx H_2(j\omega)$ .

utilisée pour discrétiser le système analogique est souvent appelée transformation bilinéaire et est fondée sur le changement de variable  $p = \frac{2}{T_e} \times \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ <sup>6</sup>. On prend<sup>7</sup> ici  $T_e = \frac{1}{9600}$ .

- *obtention de la relation de récurrence* : à partir de la transformée  $H_3$ , on détermine la relation de récurrence à implanter dans le filtre numérique.

Dans les questions qui suivent, toute latitude est laissée sur la démarche, notamment en termes d'emploi d'un outil logiciel.

- a. i) Vérifier que  $H_1(s) = \frac{as^2}{s^4 + b\sqrt{2}s^3 + cs^2 + d\sqrt{2}s + 1}$  et préciser les valeurs prises par les réels  $a, b, c$  et  $d$ .
- ii) Tracer la courbe représentative de la fonction  $\omega \rightarrow |H_2(j\omega)|$  pour  $\omega$  dans l'intervalle  $[200\pi; 20\,000\pi]$ <sup>8</sup>.
- iii) Vérifier graphiquement que le filtre dont la fonction de transfert est  $H_2$  est bien un filtre passe-bande de fréquence centrale  $f_0$ .
- iv) Vérifier graphiquement qu'il existe deux pulsations  $\omega$  telles que  $|H_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H_2(j\omega_0)|$ . (Ces deux pulsations, notées  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  avec  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ , sont respectivement appelées pulsation de coupure basse et pulsation de coupure haute, et correspondent à une atténuation en puissance de 3dB<sup>9</sup>.)  
En déduire une valeur approchée du coefficient de largeur de bande donné par  $\frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\omega_0}$  et comparer avec la valeur souhaitée de 1,4.
- b. Déterminer une expression de  $H_3(z)$  et vérifier que  $H_3(z) = \frac{a'z^4 + b'z^2 + c'}{d'z^4 + e'z^3 + f'z^2 + g'z + h'}$  où  $a', b', c', d', e', f', g'$  et  $h'$  sont huit réels dont on précisera les valeurs arrondies à  $10^{-4}$ .
- c. i) Pour une pulsation  $\omega$  du signal d'entrée donnée, déterminer une expression de  $H_3(e^{j\omega T_e})$ .
- ii) En déduire une expression de  $\left| H_3 \left( e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \right) \right|$  puis tracer la courbe représentative de la fonction  $\frac{\omega}{\omega_e} \rightarrow \left| H_3 \left( e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \right) \right|$  avec  $\frac{\omega}{\omega_e}$  dans l'intervalle  $]0; \frac{1}{2}]$ . Que peut-on alors dire sur le comportement du filtre dont la fonction de transfert est  $H_3$  ? Quels sont les différences entre les pulsations de coupures correspondant à  $H_3$ , et celles correspondant à  $H_2$  obtenues à la question a. ?
- d. À partir de l'expression de  $H_3(z)$  obtenue à la question b., déterminer la relation de récurrence à implanter dans le calculateur (on pourra diviser simultanément le numérateur et le dénominateur par  $z^4$ ).

<sup>6</sup> Dans un filtre causal, il n'y a que des blocs de retard. On préfère donc écrire ainsi cette fraction, plutôt que  $\frac{z-1}{z+1}$ .

<sup>7</sup> On a bien  $f_e \gg f_0$ .

<sup>8</sup>  $20\,000\pi \approx \omega_e$ . On pourrait même arrêter le tracé à la pulsation  $10\,000\pi$ , la périodisation du spectre lors de la phase d'échantillonnage venant de toutes façons modifier les caractéristiques autour et plus loin.

<sup>9</sup>  $20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx -3$

## 4. Éléments de correction et éclairages

### 4.1. Rôle d'un filtre numérique dans un égaliseur

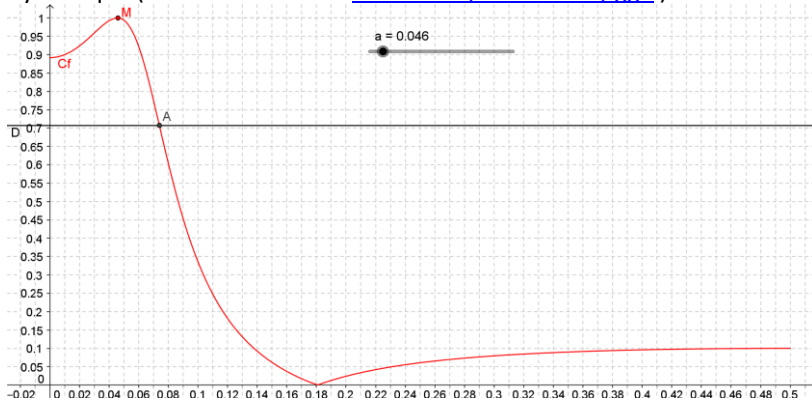
<p>a. On a : si <math>n &lt; 0, e_n = s_n = 0</math> ; si <math>n \geq 0, e_n = 1</math>. D'où, avec la relation de récurrence, <math>s_0 = K, s_1 = K(1 + a - c)</math> et <math>s_2 = K(1 + a + b - c(1 + a - c) - d)</math></p>	<p>Cette première question peut notamment permettre aux étudiants de s'approprier la relation de récurrence (on peut aussi faire le choix de travailler directement avec les valeurs numériques fournies dans la suite de l'énoncé).</p>
<p>b. Fichier OpenOffice Calc : <a href="#">Section 1- feuille de calcul.ods</a> On conjecture que <math>\ell \approx 0,892</math>.</p>	<p>Selon le travail mené en classe, on peut supprimer l'indication portant sur l'utilisation d'un outil logiciel (les étudiants étant amenés à mobiliser d'eux-mêmes un tel outil pour répondre à la question posée).</p>
<p>c.i) L'utilisation des formules sur les transformées en <math>Z</math> usuelles conduisent à : <math>H(z) = \frac{K(z^2+az+b)}{z^2+cz+d}</math>.</p>	<p>En électronique, c'est en étudiant la fonction de transfert du filtre (question d.) que l'on va connaître son comportement dans ce qui nous intéresse ici, le domaine fréquentiel.</p>
<p>c.ii) Comme <math>E(z) = \frac{z}{z-1}</math>, on a : <math>S(z) = \frac{0,1125(z^3-0,8437z^2+z)}{z^3-2,5265z^2+2,1989z-0,6724}</math></p>	<p>On peut recourir ici à un logiciel de calcul formel pour mener les calculs algébriques.</p>
<p>c.iii) Il n'est pas aisé de déterminer une expression explicite du signal de sortie. Deux pistes pour ouvrir la réflexion et la discussion : - exploiter la décomposition en éléments simples suivante :</p> $\frac{z^3-0,8437z^2+z}{z^3-2,5265z^2+2,1989z-0,6724} = 1 + \frac{7,92529}{z-1} + \frac{4,65657-6,24249z}{z^2-1,5265z+0,6724}$ <p>C'est l'occasion d'amener les élèves à effectuer des recherches sur la transformée en <math>Z</math> inverse de <math>z \rightarrow \frac{4,65657-6,24249z}{z^2-1,5265z+0,6724}</math>. - exploiter un logiciel de calcul formel pour voir s'il est possible de déterminer la transformée en <math>Z</math> inverse cherchée.</p>	<p>Cette question permet de tester la prise d'initiative et l'autonomie des élèves : la forme obtenue ici ne correspond pas aux formules des transformées en <math>Z</math> usuelles.</p> <p>Par ailleurs, la question est l'occasion de faire réfléchir les étudiants sur l'intérêt (ou non) de disposer d'une expression explicite de <math>s_n</math> pour tout entier naturel <math>n</math>. Il est pertinent de mener cette réflexion conjointement avec les enseignants des disciplines technologiques.</p>
<p>c. iv) On utilise le théorème de la valeur finale : d'où</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0,1125 \times 7,92529 \approx 0,892$	<p>Le théorème de la valeur finale prend ici tout son intérêt : alors qu'il n'est pas aisé de disposer d'une expression de <math>s_n</math> pour tout entier naturel <math>n</math>, on peut néanmoins déterminer la limite de la suite <math>(s_n)</math>.</p> <p>On n'oubliera pas de se demander si la valeur observée en question 1-b. est la bonne.</p>
<p>Le tableur ou la programmation d'un algorithme permet d'aboutir à <math>N = 45</math>.</p>	<p>Il peut être intéressant de demander aux étudiants de comparer, en termes d'efficacité, le recours au tableur et le recours à un algorithme (la réponse peut varier d'un individu à l'autre ...).</p>
<p>d. i) <math>H(e^{j\omega T_e}) = \frac{0,1125(e^{2j\omega T_e}-0,8437e^{j\omega T_e}+1)}{e^{2j\omega T_e}-1,5265e^{j\omega T_e}+0,6724}</math>.</p>	
<p>ii) <math> H(e^{j\omega T_e})  = \frac{0,1125 e^{2j\omega T_e}-0,8437e^{j\omega T_e}+1 }{ e^{2j\omega T_e}-1,5265e^{j\omega T_e}+0,6724 }</math> donc, avec un logiciel de calcul formel, on a :</p> $\left  H\left(e^{j2\pi\frac{\omega}{\omega_e}}\right) \right  = \frac{0,1125\sqrt{-3,3748\cos(\omega T_e)+2\cos(2\omega T_e)+2,71182969}}{\sqrt{-5,1058372\cos(\omega T_e)+1,3448\cos(2\omega T_e)+3,78232401}}$	<p>Selon le travail mené en classe, on peut supprimer l'indication portant sur l'utilisation d'un outil logiciel (les étudiants étant amenés à mobiliser d'eux-mêmes un tel outil pour répondre à la question</p>

Fichier Xcas : [Section 1-question d.ii\).xws](#)

iii) On introduit la fonction

$$\tilde{H}(x) = \frac{0,1125\sqrt{-3,3748 \cos(2\pi x)+2 \cos(4\pi x)+2,71182969}}{\sqrt{-5,1058372 \cos(2\pi x)+1,3448 \cos(4\pi x)+3,78232401}}$$

On en trace la représentation graphique avec un logiciel de géométrie dynamique (Fichier GeoGebra : [Section 1-question d.iii\).ggb](#)) :



On peut alors conclure que :

- le filtre implanté ici est un filtre passe-bas ;
- le gain maximal est environ égal 1 et est atteint pour la valeur de la pulsation réduite  $\frac{\omega}{\omega_e}$  environ égale à 0,046 soit pour une pulsation :  $\omega_M \approx 0,046 \times \frac{2\pi}{T_e} \approx 2775 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , soit une fréquence  $f_M \approx 442 \text{ Hz}$ ;
- la seule pulsation de coupure  $\omega_c$  est telle que  $\frac{\omega_c}{\omega_e} \approx 0,074$  soit  $\omega_c \approx 0,074 \times \frac{2\pi}{T_e} \approx 4464 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , ce qui correspond à une fréquence de coupure  $f_c \approx 710 \text{ Hz}$ .

posée).

On connaît ici le comportement en fréquence du filtre implanté : on considère qu'il laisse passer les fréquences basses en dessous de 710Hz et qu'il atténue les fréquences supérieures. Les sons de fréquence 442Hz seront transmis tels qu'ils sont (gain de 1). Par contre et à titre d'exemple, les sons de fréquence 1350Hz (ce qui correspond à  $\frac{\omega}{\omega_e} \approx 0,14$ ) seront atténués en amplitude d'un facteur 10 ( $\times 0,1$ ) donc ils auront en sortie une puissance sonore 100 fois moins importante après ce filtrage (la puissance est proportionnelle au carré de la tension, ce qui correspond à un recul de 20 dB.

Le numérateur de  $H(z)$  est  $z^2 + az + b$ . Les coefficients sont réels,  $\Delta < 0$ ,  $b = 1$ . Les racines sont complexe-conjuguées et de module 1. Donc  $H\left(e^{j2\pi\frac{\omega}{\omega_e}}\right)$  présente des zéros simples ( $\frac{\omega}{\omega_e} \approx 0,18$ ;  $\frac{\omega}{\omega_e} \approx 1 - 0,18 = 0,82$ ; et leurs 1-périodisés) correspondant à une extinction totale des fréquences. Le graphe de  $\left|H\left(e^{j2\pi\frac{\omega}{\omega_e}}\right)\right|$  laisse apparaître des points anguleux.

#### 4.2. Élaboration d'un filtre numérique dans un égaliseur

a. i) L'emploi d'un logiciel de calcul formel conduit à :

$$H_1(s) = \frac{\alpha^2 s^2}{s^4 + \alpha\sqrt{2}s^3 + (\alpha^2 + 2)s^2 + \alpha\sqrt{2}s + 1}$$

soit encore :

$$H_1(s) = \frac{1,96s^2}{s^4 + 1,4\sqrt{2}s^3 + 3,96s^2 + 1,4\sqrt{2}s + 1}$$

Fichier Xcas [Section 2-question a.i\).xws](#)

ii) L'emploi d'un logiciel de calcul formel et/ou de géométrie dynamique conduit à la courbe représentative de la fonction  $\omega \rightarrow |H_2(j\omega)|$  pour  $\omega$  dans l'intervalle  $[200\pi; 20\,000\pi]$ .

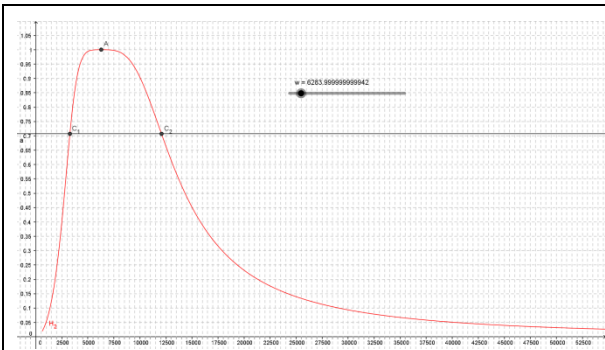
Fichier Xcas [Section 2-question a.ii\).xws](#)

iii) Graphiquement, le filtre dont la fonction de transfert est  $H_2$  est bien un filtre passe-bande dont la pulsation correspondant à la fréquence centrale est environ égale à  $6300 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , soit une fréquence centrale environ égale à 1000Hz.

Dans toute cette question a., les outils logiciels jouent un rôle crucial, notamment en permettant d'effectuer des calculs peu aisés à effectuer « à la main ». Ces outils peuvent être de nature variée : tableur, logiciel de calcul formel, grapheur ou encore logiciel de géométrie dynamique.

De plus, l'aspect graphique joue un rôle essentiel.

Si on prend un filtre



iv) La droite (horizontale) d'équation  $y = \frac{1}{\sqrt{2}} |H_2(j\omega_0)|$  et la courbe représentative de la fonction  $\omega \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |H_2(j\omega)|$  ont exactement deux points d'intersection pour  $\omega$  dans l'intervalle  $[200\pi; 20\,000\pi]$ . Graphiquement, on a :  $\omega_{c1} \approx 3\,270 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\omega_{c2} \approx 12\,070 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . On obtient alors  $\frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\omega_0} \approx 1,401$ . On retrouve bien la valeur du coefficient de bande souhaité.

Fichier Geogebra : [Section 2-question a.iv\).ggb](#)

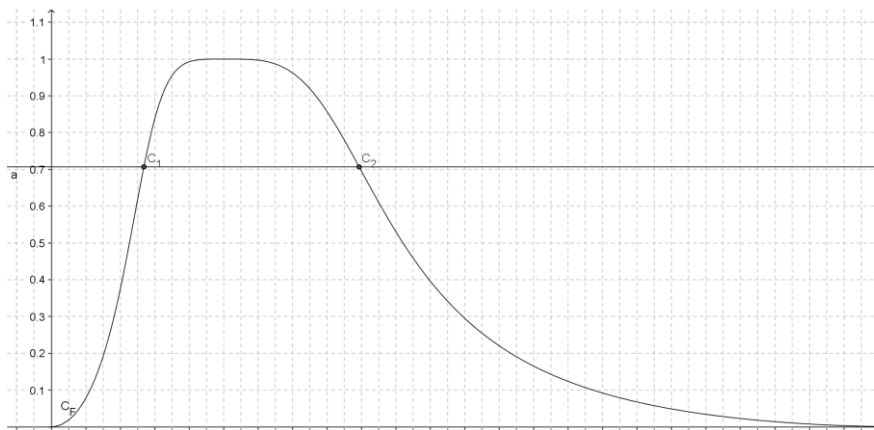
b. Un logiciel de calcul formel donne :  $\frac{2}{T_e} \times \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 19\,200 \times \frac{z-1}{z+1}$  ainsi que l'expression  $H_3(z) = \frac{3,5351z^4 - 7,0702z^2 + 3,5351}{36,2578z^4 - 86,0815z^3 + 87,9249z^2 - 47,1074z + 12,0965}$  (on arrondit arbitrairement à 4 chiffres après la virgule).

Fichier Xcas : [Section 2-question b.xws](#)

c.i) Immédiat avec l'expression précédente.

ii) L'emploi d'un logiciel de calcul formel permet d'aboutir à une expression explicite de

$\left| H_3 \left( e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \right) \right|$  ainsi qu'à la courbe représentative de la fonction  $\frac{\omega}{\omega_e} \rightarrow \left| H_3 \left( e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \right) \right|$  avec  $\frac{\omega}{\omega_e}$  dans l'intervalle  $\left] 0; \frac{1}{2} \right]$  :



Fichiers Xcas et GeoGebra : [Section 2-question b.xws](#) et [Section 2-question c.ii\).ggb](#).

On en déduit que le filtre dont la fonction de transfert est  $H_3$  est un filtre passe-bande dont les deux pulsations de coupure  $\omega'_{c1}$  et  $\omega'_{c2}$  sont telles que  $\frac{\omega'_{c1}}{\omega_e} \approx 0,054$  et  $\frac{\omega'_{c2}}{\omega_e} \approx 0,179$  d'où  $\omega'_{c1} \approx 3\,260 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\omega'_{c2} \approx 10\,800 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  (à  $10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  près). On constate que la pulsation de coupure basse est « bien conservée », ce qui est moins vrai pour la pulsation de coupure haute.

d'ordre plus élevé (3,4, ...) le filtre devient plus sélectif, c'est-à-dire que l'on atténue plus les fréquences en dehors de la bande passante (les « épaulements » du spectre tombent plus à la verticale). Par exemple, pour une fréquence donnée en dehors de la bande passante, l'amplitude d'entrée est divisée par 10 pour un filtre d'ordre 2, par 100 pour un filtre d'ordre 4, etc.

On peut mettre en évidence ici un parallèle signal analogique/signal numérique, ou encore transformée de Laplace/transformation en Z. On peut superposer les tracés des questions a. et c.



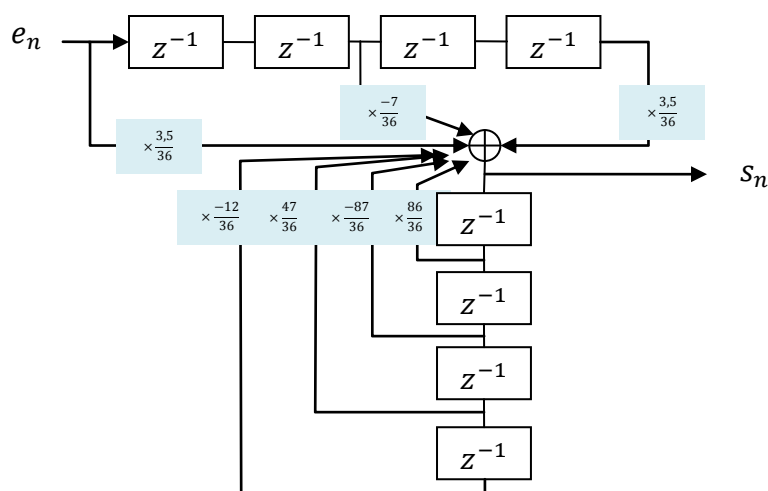
d. En partant de  $H_3(z)$ , on a :  $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{3,5351 - \frac{7,0702}{z^2} + \frac{3,5351}{z^4}}{36,2578 - \frac{86,0815}{z} + \frac{87,9249}{z^2} - \frac{47,1074}{z^3} + \frac{12,0965}{z^4}}$ . On en

déduit que :

$$36,2578s_n - 86,0815s_{n-1} + 87,9249s_{n-2} - 47,1074s_{n-3} + 12,0965s_{n-4} = 3,5351e_n - 7,0702e_{n-2} + 3,5351e_{n-4}$$

Isoler  $s_n$  fournit la relation de récurrence à implanter dans le filtre.

Matériellement, le filtre est peut être réalisé à l'aide de registres à décalage, comme le résume l'architecture simplifiée<sup>10</sup> ci-dessous :



Il existe des outils logiciels, à l'instar de Matlab, qui permettent de passer directement du gabarit à l'équation de récurrence en un seul clic : on ne voit aucun calcul. On découvre ici le travail sous-jacent opéré par un tel outil logiciel.

En collaboration avec les enseignants des disciplines technologiques, il peut être intéressant d'observer sur ce même exemple les conséquences de l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage du filtre. Pour ce faire, on peut reprendre les questions b. et c. en élevant d'un facteur 10 ou 100 la fréquence d'échantillonnage, donc en prenant  $T_e = \frac{1}{96\ 000}$  s voire  $T_e = \frac{1}{960\ 000}$  s et s'interroger sur :

- l'influence sur les pulsations de coupure ;
- les différences avec le comportement souhaité du filtre ;
- l'influence sur les coefficients  $a', b', c', d', e', f', g'$  et  $h'$  présents dans l'équation de récurrence du filtre.

Sur la plage des fréquences stratégique, les deux fonctions de transfert devraient se rapprocher.

L'équipe qui a rédigé ce document ressource était composée de :

**Cabane Robert, IGEN, groupe des mathématiques**

**Liébaud Jean-François, professeur agrégé de STI, académie de Créteil**

**Sorosina Éric, IA-IPR de mathématiques, académie de Rennes**

**Zayana Karim, IGEN, groupe des mathématiques**

<sup>10</sup> Pour des traitements temps réel à haut débit, le circuit dédié ne manipulerait que des nombres entiers. Une conversion d'échelle (reformatage des valeurs et des coefficients sur une plage de 0 à 255 par exemple) serait alors effectuée.