Olympiades nationales de mathématiques 2023

Académie de DIJON

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

La première partie de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, la seconde des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

- **Tous les autres candidats** (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

PARTIE 2 – PAR ÉQUIPE

Ce sujet comprend sept pages, celle-ci incluse.

<u>*Exercice académique 1*</u> *(à traiter par tous les candidats)*

À gauche ou à droite ?

Partant d'une fraction $\frac{a}{b}$, avec a et b strictement positifs, on définit les trois transformations suivantes :

$$G : \frac{a}{b} \longmapsto \frac{a}{a+b} \qquad D : \frac{a}{b} \longmapsto \frac{a+b}{b} \qquad H : \frac{a}{b} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{a-b}{b} & \text{si } a \geq b \\ \dfrac{a}{b-a} & \text{sinon} \end{cases}$$

Au lieu d'écrire $G\left(\frac{2}{5}\right)$ on notera d'abord la fraction, puis la transformation effectuée, comme suit : $\frac{2}{5}G$.

Donnons quatre exemples :

$$\frac{2}{5}G = \frac{2}{2+5} = \frac{2}{7} \qquad \frac{2}{3}D = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3} \qquad \frac{16}{9}H = \frac{16-9}{9} = \frac{7}{9} \qquad \frac{5}{6}H = \frac{5}{6-5} = \frac{5}{1}$$

Si l'on enchaîne plusieurs transformations, on les note et on les effectue de gauche à droite :

$$\frac{2}{3}DDG = \frac{5}{3}DG = \frac{8}{3}G = \frac{8}{11}$$

Dans tout l'exercice, on ne considèrera que des fractions $\frac{a}{b}$ de numérateur et dénominateur strictement positifs.

Partie 1 – Où l'on parle de $D,\ H,\ G$.

1. Calculer $\frac{1}{3}DG$ et $\frac{5}{7}HD$.

2. Calculer $\frac{13}{5}HHHHH$.

3. a. Calculer $\frac{1}{1}GGGGGG$ puis $\frac{1}{1}DDDDDD$.

   b. Conjecturer l'expression en fonction de n de $\frac{1}{1}\underbrace{GG \dots GG}_{n \text{ fois}}$ puis de $\frac{1}{1}\underbrace{DD \dots DD}_{n \text{ fois}}$.

4. Montrer que lorsque qu'une fraction est transformée par G, le résultat est strictement inférieur à 1.

   Qu'en est-il pour une fraction transformée par D ?

5. Démontrer que si $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $\frac{a}{b}G$ est aussi irréductible.

   On admettra pour la suite que si $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $\frac{a}{b}D$ et $\frac{a}{b}H$ le sont aussi.

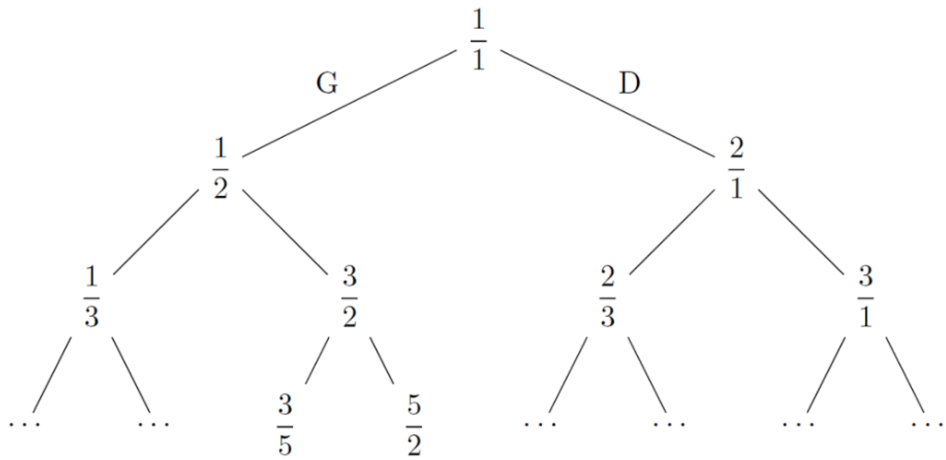
6. a. Calculer $\frac{a}{b}DH$ et $\frac{a}{b}GH$. Que constate-t-on ?

   b. En déduire la valeur de $\frac{7}{17}GHDGHDHHGDDHGGHHHDGH$.

7. Déterminer, en fonction de a, n et b, l'expression de $\frac{a}{b}\underbrace{GG \dots GG}_{n \text{ fois}}$ et $\frac{a}{b}\underbrace{DD \dots DD}_{n \text{ fois}}$.

Partie 2 – Où l’on descend d’un arbre.

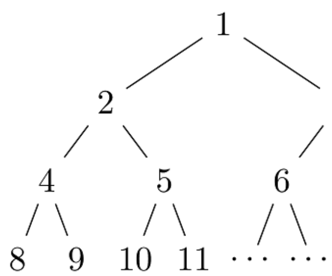
Partant de la fraction $\frac{1}{1}$, on peut représenter ces transformations successives et leurs résultats dans un arbre :



1. Reproduire l’arbre sur votre copie, en complétant la quatrième ligne et en ajoutant la cinquième.
2. En utilisant les résultats de la partie 1, justifier qu’en appliquant la transformation H à une fraction de l’arbre différente de $\frac{1}{1}$, on obtient la fraction qui la précède.
3. Montrer que la fraction $\frac{21}{8}$ apparaîtra dans l’arbre, en donnant une suite de transformations permettant de l’atteindre en partant de la fraction $\frac{1}{1}$.
4. Justifier que toutes les fractions irréductibles strictement positives apparaissent exactement une fois et une seule dans l’arbre.

Partie 3 – Où l’on atteint le millésime.

Les fractions de l’arbre de la partie 2 sont numérotées de gauche à droite et de haut en bas comme suit :



Par exemple, la fraction $\frac{3}{2}$ de l’arbre de la partie 2 porte le numéro 5.

1. Justifier que si une fraction possède le numéro n, alors les deux fractions qui lui succèdent dans l’arbre à la ligne suivante portent les numéros $2n$ et $2n + 1$.
2. Quelle est la fraction numéro 256 ? Quelle est la fraction numéro 1023 ?
3. Déterminer le numéro de la fraction $\frac{2022}{2023}$.
4. Quelle est la fraction numéro 2023 ?

Exercice académique 2 *(à traiter par les candidats de la voie générale qui ont suivi la spécialité « mathématiques »)*

Les délices

Dans cet exercice, nous travaillerons avec des nombres entiers strictement positifs.

Partie 1 – Introduction.

1. L'égalité suivante, composée de 6 entiers (à gauche) puis 5 entiers (à droite), tous consécutifs, est-elle vraie ?

$$25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$$

2. Trouver une égalité semblable avec :
   - 4 entiers puis 3 entiers, tous consécutifs ;
   - 10 entiers puis 5 entiers, tous consécutifs.

Indication : on pourra noter x le plus petit des entiers qui interviennent dans cette égalité (l'entier le plus à gauche).

On dit qu'un entier est incrémenté d'une unité si on lui ajoute une unité. Dans ce problème, on s'intéresse aux :

Sommes avec **D**es **E**ntiers **L**onguement **I**ncrémentés **C**omme dans l'**E**xemple.

En conservant les initiales soulignées, nous obtenons délice. Nous donnerons ce nom à ces égalités bien particulières.

L'égalité $4+5+6=7+8$ est ainsi un délice avec 3 entiers puis 2 entiers, tous consécutifs.

Partie 2 – L'équation générale.

Dans cette partie, nous nous intéressons plus généralement aux délices avec p entiers puis n entiers, tous consécutifs, x étant le plus petit de tous ces entiers. L'équation correspondante est :

$$x+(x+1)+(x+2)+\ \dots+(x+p-1)=(x+p)+(x+p+1)+\ \dots+(x+p+n-1)$$

Dans le membre de gauche de l'équation, les entiers vont de $x+0$ à $x+p-1$, il y a donc bien p entiers.
Dans le membre de droite de l'équation, les entiers vont de $(x+p+0)$ à $(x+p+n-1)$, il y a donc bien n entiers.

Remplaçons x par 25 comme dans le premier exemple de la partie 1. L'égalité devient alors :

$$25+26+27+\ \dots+(25+p-1)=(25+p)+(25+p+1)+\ \dots+(25+p+n-1) \qquad (D)$$

1. Nous rappelons que pour tout nombre entier $k \geq 2$ on a :

$$\boxed{1+2+\ \dots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}}$$

   Montrer alors que l'équation (D) équivaut à l'équation : $49(p-n)=n^2+2np-p^2$.

2. Vérifier que le couple $(p=6\,;n=5)$ est une solution de cette équation. À quel délice correspond-elle ?
3. Vérifier que le couple $(p=21\,;n=14)$ est une autre solution de l'équation. À quel délice correspond-elle ?

Trouver l'équation générale des délices n'est pas plus difficile que ce qui précède où $x=25$. On admettra que :

> *Trouver des délices avec p entiers puis n entiers, tous consécutifs comme dans le premier exemple avec x le plus petit de tous les entiers, revient à trouver des solutions entières de l'équation :*
>
> $$(2x-1)(p-n)=n^2+2np-p^2$$

Partie 3 – Le cas $n = p - 1$.

Ce cas $n = p - 1$ correspond à la situation où il y a un entier de moins à droite qu'à gauche dans le délice, comme dans les délices composés de 4 puis 3 entiers ou bien de 6 puis 5 entiers, tous consécutifs.

1. Montrer que dans ce cas l'équation $(2x-1)(p-n) = n^2 + 2np - p^2$ a comme solution : $x = (p-1)^2$.
2. Déterminer les délices qui correspondent aux cas $p = 6$ et $p = 7$.

Partie 4 – Une recherche de délices avec x imposé.

Dans le premier exemple du problème, nous avons donné un délice avec $x = 25$. On peut légitimement se demander s'il est possible de trouver un délice avec n'importe quel nombre entier x. Prenons $x = 10$ pour démarrer cette partie.

1. Montrer que si $x = 10$, alors l'équation générale $(2x-1)(p-n) = n^2 + 2np - p^2$ devient :

$$2n^2 = (p-n)^2 + 19(p-n)$$

2. Il est en général très difficile de résoudre une telle équation avec des nombres entiers. Nous pouvons néanmoins déterminer une solution assez évidente dans certains cas, par exemple ici lorsque $p - n = 19$. Déterminer alors la valeur de n correspondante puis en déduire la valeur de p et le délice associés.

En généralisant ce qui précède, nous pouvons montrer que l'on peut déterminer un délice à partir de n'importe quel entier x donné. On admet que l'équation générale peut s'écrire : $2n^2 = (p-n)^2 + (2x-1)(p-n) \quad (E)$

3. Déterminer un délice avec $x = 100$.

Partie 5 – Le cas $n = 3$.

1. Montrer que dans ce cas l'équation générale (E) conduit à l'équation :

$$p^2 + (2x-7)p + (-6x-6) = 0 \quad (E')$$

Fixons la valeur de l'entier x et regardons cette équation comme une équation du second degré d'inconnue p.

2. Vérifier que l'équation (E') possède une solution entière positive lorsque $x = 2$. Écrire le délice correspondant.
3. Montrer que le discriminant associé à l'équation (E') est : $\Delta = (2x-1)^2 + 72$.

Afin d'espérer trouver des solutions entières dans notre recherche, le discriminant Δ doit déjà être un carré.

On s'intéresse donc à l'équation $(2x-1)^2 + 72 = Y^2$ qui devient $X^2 + 72 = Y^2$ en posant $X = 2x - 1$.

Le couple $(\mathrm{X} = 3\ ;\ \mathrm{Y} = 9)$ est par exemple une solution de cette équation puisque $3^2 + 72 = 9^2$.

4. a. Montrer que si $X \geq 36$, alors l'écart entre X^2 et $(X+1)^2$ est strictement supérieur à 72.

   b. En déduire que l'équation $X^2 + 72 = Y^2$ n'a pas de solution entière lorsque $X \geq 36$.

5. Trouver les trois couples-solutions de cette équation où X et Y sont des entiers naturels, avec $0 \leq X \leq 35$.
6. Déterminer alors tous les délices correspondant au cas $n = 3$.

Partie 6 – Question subsidiaire pour départager d'éventuels ex-aequo.

Étudier, en vous inspirant des parties précédentes et en expliquant votre démarche, le cas $n = \frac{1}{2}p$ ou le cas $n = p - 2$.

Exercice académique 3 _(à traiter par les candidats de la voie générale qui n'ont pas suivi la spécialité « mathématiques » et par les candidats de la voie technologique)_

Nombres épatants

On construit l'ensemble des **nombres épatants**, noté $\mathbb{R}[\varepsilon]$, contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- Les opérations classiques sur les nombres réels, comme l'addition, la soustraction, la multiplication ainsi que la distributivité de la multiplication sur l'addition restent valables dans $\mathbb{R}[\varepsilon]$ sans en changer les propriétés ;
- L'ensemble $\mathbb{R}[\varepsilon]$ contient un élément ε, où ε est un **symbole** vérifiant $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon^2 = 0}}$;
- Tout nombre épatant peut s'écrire sous la forme $a + b\varepsilon$, où a est un nombre **réel** appelé **partie réelle** à laquelle on ajoute une **partie volatile** $b\varepsilon$, où b est un nombre **réel**.

On admet que deux nombres épatants $a + b\varepsilon$ et $c + d\varepsilon$ sont **égaux** si, et seulement si, $a = c$ **et** $b = d$.

Partie 1 – Nombres épatants et opérations.

1. Soient les deux nombres épatants : $n_1 = 1 + 3\varepsilon$ et $n_2 = 4 - \varepsilon$.
    a. Vérifier que $n_1 + n_2 = 5 + 2\varepsilon$ puis calculer $n_1 - n_2$.
    b. Vérifier que $n_1 n_2 = 4 + 11\varepsilon$.
2. Dans cette question, on note $n_1 = a + b\varepsilon$ et $n_2 = c + d\varepsilon$ deux nombres épatants.
   Démontrer que $n_1 n_2 = ac + (ad + bc)\varepsilon$. Est-ce toujours un nombre épatant ?
3. Soit $n = a + b\varepsilon$ un nombre épatant. On note $\tilde{n}$ le nombre épatant valant $a - b\varepsilon$.
   L'épatant $\tilde{n}$ s'appelle **conjugué** de n.
    a. Que peut-on dire de $\tilde{\tilde{n}}$?
    b. Soit $n = 3 + 4\varepsilon$. Calculer $n\tilde{n}$.
    c. Montrer que pour tout nombre épatant n, le nombre $n\tilde{n}$ est un réel positif.

Partie 2 – Nombres épatants et inverses.

Comme dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, deux nombres épatants sont dits **inverses** si leur produit vaut 1.

Dans ce curieux ensemble $\mathbb{R}[\varepsilon]$, on se propose de rechercher les éventuels inverses de nombres épatants.

1. Les nombres $2 + 3\varepsilon$ et $0{,}5 - 0{,}75\varepsilon$ sont-ils inverses ?
2. Déterminer les réels a et b tels que $(4 + 2\varepsilon)(a + b\varepsilon) = 1$.
   Que peut-on en déduire pour l'épatant $4 + 2\varepsilon$?
3. 7ε a-t-il un inverse ? Justifier.

Partie 3 – Nombres épatants et diviseurs de zéro.

Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un de ses facteurs est nul.

Nous cherchons à savoir si cette propriété reste vraie dans le curieux ensemble des nombres épatants.

1. a. Déterminer les réels a et b tels que $(3+\varepsilon)(a+b\varepsilon)=0$.

   b. Existe-t-il des réels a et b tels que $7\varepsilon(a+b\varepsilon)=0$?

2. Soient $n_1=a+b\varepsilon$ et $n_2=c+d\varepsilon$ deux nombres épatants, non nuls, de <u>produit nul</u>.

   a. Démontrer que : $n_1n_2=0 \Leftrightarrow (ac=0)$ et $(ad+bc=0)$.

   b. Démontrer que si $a=0$, alors $c=0$.

   c. On admet que réciproquement si $c=0$, alors $a=0$. En déduire la forme générale des nombres épatants non nuls dont le produit est égal à 0. De tels nombres sont appelés **diviseurs de zéro**.

Partie 4 – Nombres épatants et puissances.

1. a. Calculer $(1+\varepsilon)^2$; $(1+\varepsilon)^3$ et $(1+\varepsilon)^4$.

   b. Conjecturer l'expression de $(1+\varepsilon)^n$ pour tout entier naturel n.

2. Reprendre la question précédente avec le nombre $(x+\varepsilon)^n$ où x est un réel et n un entier naturel.

Partie 5 – Formules épatantes.

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}[\varepsilon]$ et x un nombre réel.

On définit la fonction $\dot{f}$ sur $\mathbb{R}$ par $f(x+\varepsilon)=f(x)+\dot{f}(x)\varepsilon$.

1. Montrer que si $f(x)=x^2$, alors $\dot{f}(x)=2x$.
2. Soit $f(x)=x^n$, où n est un entier naturel. Déterminer l'expression de $\dot{f}$.
3. Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}[\varepsilon]$.
   On pose : $u(x+\varepsilon)=u(x)+\dot{u}(x)\varepsilon$ et $v(x+\varepsilon)=v(x)+\dot{v}(x)\varepsilon$.
   Développer $u(x+\varepsilon)\times v(x+\varepsilon)$ et en déduire sa partie volatile.

Les nombres épatants offrent une puissance de calcul extraordinaire concernant la dérivation.

En effet, la fonction $\dot{f}$ se note en réalité f' et s'appelle fonction dérivée de la fonction f.

Cette dernière joue un rôle central dans l'étude des variations de la fonction f.