MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
*Liberté
Égalité
Fraternité*

Olympiades nationales de mathématiques 2024

ACADÉMIE
DE DIJON
*Liberté
Égalité
Fraternité*

PARTIE 2

Académie de DIJON

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

La première partie de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, la seconde des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures).

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths »), et uniquement ceux-là, doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Chaque candidat traite ainsi deux exercices académiques. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Ce sujet comprend dix pages, celle-ci incluse.

Exercice académique 1 (tous les candidats)

Suites Phoenix

On considère ici des suites de nombres entiers. On dira que l'on « brûle » la suite lorsque l'on retire les termes de rangs impairs de cette suite. On appelle suite « phœnix », une suite qui, une fois brûlée, est identique à la suite initiale. Par exemple, si on considère la suite des entiers pairs, dont les premiers termes sont :

rang	**0**	1	**2**	3	**4**	5	**6**	…
terme	**0**	2	**4**	6	**8**	10	**12**	…

Les premiers termes de sa suite brûlée sont : $0\,;4\,;8\,;12$. Cette suite n'est donc pas une suite phœnix.

Partie 1

1. On considère la suite des carrés parfaits : $0\,;\ 1\,;\ 4\,;\ 9\ \ldots$

   Déterminer les cinq premiers termes de sa suite brûlée. Est-ce une suite phœnix ?
2. On considère la suite constante dont tous les termes sont 2024. Est-ce une suite phœnix ?
3. Donner les 10 premiers termes d'une suite, dont la suite brûlée aurait pour premiers termes : $1\,;2\,;3\,;4\,;5$.

Partie 2

On considère la suite dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de rang égal à une puissance de 2, qui valent alors 1. Voici les 17 premiers termes de cette suite :

rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
terme	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	…

1. Écrire les 33 premiers termes de cette suite.
2. Vérifier qu'en brûlant cette suite, les termes restant sont bien ses 17 premiers termes.
3. Démontrer que cette suite est une suite phœnix.

Partie 3

1. Démontrer qu'une suite est phœnix si, et seulement si, pour tout entier naturel n, le terme de rang $2n$ est égal à celui de rang n.
2. En supposant que le terme de rang 1 d'une suite phœnix vaut 1, quelle est la valeur de celui de rang 1024 ?

On ajoute la règle suivante : un terme de rang impair est toujours la somme de son prédécesseur et de son successeur. Par exemple, si le terme de rang 6 vaut 2 et celui de rang 8 vaut 1 alors celui de rang 7 est égal à 3.

3. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, qui donne les 17 premiers termes de la suite, phœnix, vérifiant la règle précédente :

rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
terme	0	1																…

4. Déterminer la valeur du terme de rang 42 de cette suite.
5. Déterminer la valeur du terme de rang 83 de cette suite.
6. Déterminer la valeur du terme de rang 2024 de cette suite.
7. Démontrer qu'un terme de cette suite vaut 1 si, et seulement si, son rang est une puissance de 2.

Partie 4

On présente les termes de la suite de la partie 3 sous la forme suivante à partir du rang 1 : lorsque l'on écrit les termes de la suite, on retourne à la ligne dès que l'on rencontre la valeur 1 une seconde fois.

Voici les 3 premières lignes ainsi obtenues :

1							
1	2						
1	3	2	3				
1	…	…	…	…	…	…	…

1. Écrire les quatrième et cinquième lignes du tableau précédent.
2. Combien de termes apparaissent sur la 10^{e} ligne de ce tableau ?
3. Pour compléter le tableau jusqu'à la 10^{e} ligne incluse, combien de nombres faut-il écrire au total ?
4. Que peut-on conjecturer sur la somme des nombres de chaque ligne de ce tableau ?
5. Que peut-on conjecturer sur la nature des suites formées par les colonnes de ce tableau ?

   A-t-on « raison » de dire qu'elles sont phœnix ?

Exercice académique 2 (candidats de la voie générale qui suivent la « spécialité mathématiques »)

Somme = Produit

Dans tout ce problème, n désigne un entier vérifiant $n \geq 2$ et x_1 ; x_2 ; … ; x_n désignent des entiers strictement positifs rangés dans l'ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

On considère l'équation : $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Notre but est de trouver quelques solutions de cette équation et d'établir quelques propriétés des solutions.

Partie 1 : le cas $n = 2$

Le problème est ici de trouver deux entiers strictement positifs x et y tels que :

$$x + y = xy \text{ avec } x \leq y$$

On note $S = x + y$ et $P = xy$.

1. On considère deux entiers strictement positifs x et y solutions du problème.
   a. Justifier que $x \neq 1$.
   b. Montrer que l'on ne peut pas avoir $x \geq 3$.
2. Donner alors toutes les solutions du problème.

Partie 2 : le cas $n = 3$

Le problème est ici de trouver trois entiers strictement positifs x, y et z tels que :

$$x + y + z = xyz \text{ avec } x \leq y \leq z$$

On note $S = x + y + z$ et $P = xyz$.

1. On considère trois entiers strictement positifs x, y et z solutions du problème.
   a. Montrer que si $x \geq 2$, alors $S \leq 3z$ et $P \geq 4z$. En déduire que $x = 1$.
   b. Montrer que si $y \geq 3$, alors $S \leq 1 + 2z$ et $P \geq 3z$. En déduire que $y < 3$.
2. Donner alors toutes les solutions du problème.

Partie 3 : au moins une solution pour tout $n \geq 2$

En raisonnant comme précédemment, on obtient, et on admet que :

- La seule solution du cas $n = 4$ est : $1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4$.
- Les seules solutions du cas $n = 5$ sont : $1;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 5$ et $1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 3\ ;\ 3$ et $1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2$.
- La seule solution du cas $n = 6$ est : $1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 6$.

1. Donner une solution du cas $n = 7$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ notre problème possède au moins une solution.

Partie 4 : solution avec nombres imposés

On souhaite que les entiers 5 ; 7 et 13 figurent dans une solution de la façon suivante :

$$x_1 + x_2 + \ \dots + 5 + 7 + 13 = x_1 \times x_2 \times \ \dots \times 5 \times 7 \times 13$$

$$\text{avec } x_1 \leq x_2 \leq \ \dots \leq 5 \leq 7 \leq 13$$

Trouver une solution de cette équation, sachant que le nombre d'inconnues n'est pas imposé.

Partie 5 : avec beaucoup de 1

Nous donnons ci-dessous un résultat dont nous aurons besoin :

n	2	3	4	5	6	etc
2^{n-1}	2	4	8	16	32	etc

On admettra dans ce qui suit que $2^{n-1} > n$ pour tout $n \geq 3$.

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. Considérons une solution de notre problème :

$$x_1 + x_2 + \ \dots + x_n = x_1 x_2 \ \dots \ x_n$$

$$\text{avec } n \geq 3 \ \text{ et } \ x_1 \leq \ x_2 \leq \dots \leq x_n$$

On note $S = x_1 + x_2 + \ \dots + x_n$ et $P = x_1 x_2 \ \dots \ x_n$.

1. Justifier que si $x_1 \geq 2$, alors $P \geq 2^{n-1} x_n$ et $S \leq n x_n$. En déduire que $x_1 = 1$.
2. Justifier que l'on ne peut pas avoir $x_1 = x_2 = \ \dots = x_n = 1$.

3. Dans une solution x_1 ; x_2 ; ... ; x_n on suppose qu'il y a k entiers différents de 1, représentés dans ce qui suit par le symbole ? et par le plus grand entier x_n :

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1,}_{(n-k) fois} \underbrace{?, ?, \dots, ?}_{(k-1) fois}, x_n$$

   a. Justifier que $P \geq 2^{k-1} x_n$.

   b. Justifier que $S \leq n - k + k x_n$.

4. On suppose dans cette question que $k \geq 3$.

   a. Déduire de ce qui précède que :

$$x_n \leq \frac{n-k}{2^{k-1} - k}$$

   b. En déduire que :

$$n \geq 2^k - k$$

5. Si $n = 100\,000$, déterminer le nombre minimum de 1 que compte une solution.

   On admet que la suite $(2^k - k)$ est croissante pour $k \geq 3$.

6. Donner deux solutions du problème avec $n = 100\,000$.

Exercice académique 3 (candidats de la voie générale <u>qui ne suivent pas</u> la « spécialité mathématiques » et tous les candidats de la voie technologique)

N'y allons pas par quatre chemins

Un quadrillage rectangle étant donné, on appelle **chemin du point A vers le point B**, une ligne joignant les points A et B en suivant le quadrillage, et en ne se dirigeant que **vers la droite ou vers le haut.**

Préliminaires : le triangle de Pascal

On considère le tableau suivant, où seules les cases non grisées contiennent des valeurs :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	**3**	**1**							
4	1	4	6	**4**	1						
5	1		10	10		1					
6	1			20			1				
7	1							1			
8	1								1		
9	1									1	
10	1										

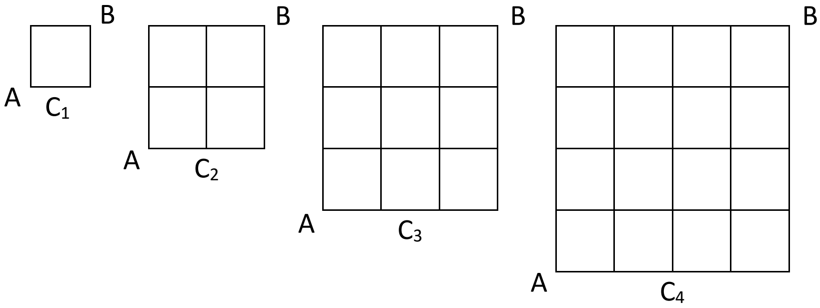
Ce tableau se construit à l'aide des règles suivantes :

- La première colonne et la diagonale ne contiennent que des « 1 » ;
- Pour obtenir le contenu d'une case vide, il suffit d'additionner le nombre situé juste au-dessus et celui situé gauche de ce dernier. Par exemple, en gras dans le tableau, $4 = 1 + 3$.

Recopier et compléter, sans justifier, toutes les cases <u>non grisées</u> du tableau précédent.

Partie 1 : nombre de chemins dans un quadrillage carré

On considère les quadrillages carrés C_1 (de côté 1), C_2 (de côté 2), C_3 (de côté 3) et C_4 (de côté 4) suivants :



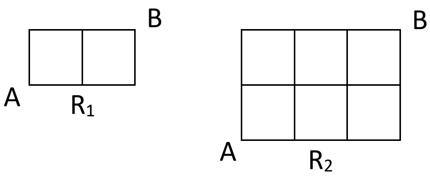
On cherche à compter, dans chaque quadrillage, le nombre de chemins différents allant du point A vers le point B.

1. Combien de chemins permettent d'aller du point A vers le point B dans le carré C_1 ?
2. Combien de chemins permettent d'aller du point A vers le point B dans le carré C_2 ?
3. On admet qu'il y a 20 chemins permettant d'aller du point A vers le point B dans le carré C_3.

   Conjecturer comment le triangle de Pascal permet de trouver le nombre de chemins allant du point A au point B dans un quadrillage carré de côté k.
4. En déduire le nombre de chemins permettant d'aller du point A vers le point B dans les carrés C_4 et C_5.

Partie 2 : nombre de chemins dans un quadrillage rectangulaire

On considère les quadrillages rectangulaires R_1 et R_2 suivants :



On cherche à compter, dans chaque quadrillage, le nombre de chemins différents allant du point A vers le point B.

1. Combien de chemins permettent d'aller du point A vers le point B dans le rectangle R_1 ?
2. Combien de chemins permettent d'aller du point A vers le point B dans le rectangle R_2 ?
3. On admet qu'il y a 15 chemins permettant d'aller du point A vers le point B dans le quadrillage rectangulaire de longueur 4 et de largeur 2.

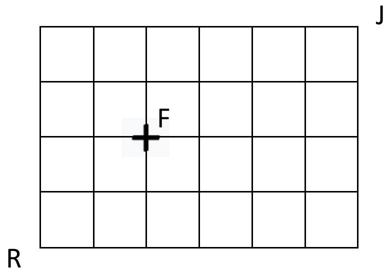
   Conjecturer comment le triangle de Pascal permet de trouver le nombre de chemins allant du point A vers le point B dans un quadrillage rectangulaire de longueur k et de largeur m.
4. En déduire le nombre de chemins permettant d'aller du point A vers le point B dans un quadrillage rectangulaire de longueur 5 et de largeur 4.

Partie 3 : Roméo et Juliette

1. Question préliminaire :

   Si trois routes permettent de relier les villes A et B et quatre routes permettent de relier les villes B et C, justifier que douze routes permettent de relier les villes A et C en passant par B.

2. On considère le quadrillage rectangulaire suivant :

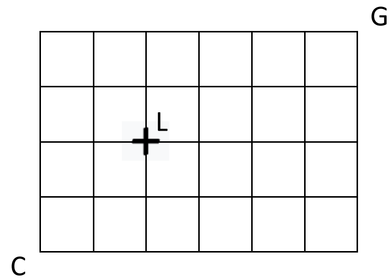


Roméo, situé en R, a rendez-vous avec Juliette, située en J. Il désire absolument passer chez le fleuriste (en F) avant de se rendre chez elle. Déterminer le nombre de chemins possibles, allant de R vers J, en passant par F.

<u>Indication</u> : on pourra partager le quadrillage en un carré et un rectangle…

Partie 4 : le Petit Chaperon rouge

On considère le quadrillage rectangulaire suivant :

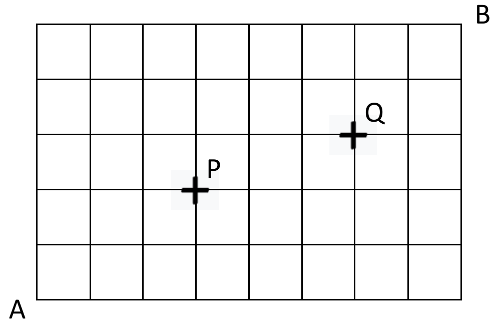


Le petit chaperon rouge, situé en C, doit apporter un panier garni à sa grand-mère, située en G. Un loup se cache en L. **Le petit chaperon rouge choisit son chemin au hasard.**

1. Déterminer le nombre de chemins où le petit Chaperon Rouge va tomber sur le loup et se faire dévorer.
2. En déduire la probabilité que le petit Chaperon Rouge retrouve, sain et sauf, sa grand-mère.

Partie 5 : les puits

On considère le quadrillage rectangulaire suivant, tiré d'un jeu vidéo :



Dans ce jeu, un personnage doit aller du point A vers le point B. Deux puits masqués sont situés aux points P et Q.

Si le personnage tombe dans l'un des puits, il ne peut pas en sortir…

Sachant que le joueur choisit son chemin au hasard, quelle est la probabilité que le personnage atteigne le point B ?