

Triplets Pythagoriciens

Partie A

1) On considère le triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 15$ et $BC = 17$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

2) On considère le triangle DEF rectangle en D tel que $DE = \frac{8}{17}$ et $DF = \frac{15}{17}$.

Calculer EF.

Partie B

1) Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) .

a) Sur la figure fournie en annexe, **placer les points** $M\left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$ et $A(-1; 0)$.

b) **Tracer le cercle de centre O et de rayon $OI = 1$.**

c) **Calculer le coefficient directeur a de la droite (AM).**

(On l'exprimera sous la forme d'une fraction irréductible).

2) On considère la droite (d) passant par le point A et de coefficient directeur $-\frac{3}{5}$.

a) **Tracer (d) sur la figure précédente.**

b) Soit $P(x; y)$ un point quelconque du cercle de centre O et de rayon $OI = 1$.

Exprimer OP^2 en fonction de x et de y . Justifier que $x^2 + y^2 = 1$.

Ainsi, tout point de coordonnées $(x; y)$ du cercle de centre O et de rayon OI a des coordonnées qui vérifient $x^2 + y^2 = 1$.

c) **Calculer une équation de la droite (d) .**

d) Soit $M'\left(\alpha, -\frac{15}{17}\right)$ un point de la droite (d) . **Calculer son abscisse α .**

e) **Démontrer que M' est un point du cercle.**

f) **Démontrer que le point M défini en 1)a) est aussi un point du cercle.**

3) a) **Ecrire 17 comme somme de deux carrés.**

b) On pose $p = 4$, $q = 1$.

Calculer : $p^2 + q^2$, $p^2 - q^2$ et $2pq$

c) D'après la Partie A question 1), sans calcul, **montrer la relation :**

$$(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 \quad (1)$$

Partie C

1) Soit N le point de coordonnées $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ du cercle de centre O et de rayon OI .

a) Calculer le coefficient directeur de la droite (AN) .

b) En déduire une construction du point N .

2) On pose $p = 3$, $q = 2$.

a) Calculer : $p^2 + q^2$, $p^2 - q^2$ et $2pq$

b) Vérifier que $(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$

3) On considère le triangle GHK tel que $GH = 5$, $GK = 12$ et $HK = 13$.

Déduire de la question 2) la nature du triangle GHK .

(On ne demande pas de réaliser une figure)

Partie D

Le but de cette partie est de trouver tous les triangles rectangles à côtés entiers d'hypoténuse 65

1) a) A l'aide d'un tableur, remplir la table de Pythagore suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1	4	9	16	25	36	49	64
2	1	2							
3	4								
4	9								
5	16								
6	25								
7	36								
8	49								
9	64								
10									

b) En déduire les décompositions de 65 comme somme de carrés de deux entiers p et q ($p > q$).

c) Trouver deux triangles rectangles d'hypoténuse 65.

2) a) Vérifier que 5 et 13 sont des diviseurs de 65.

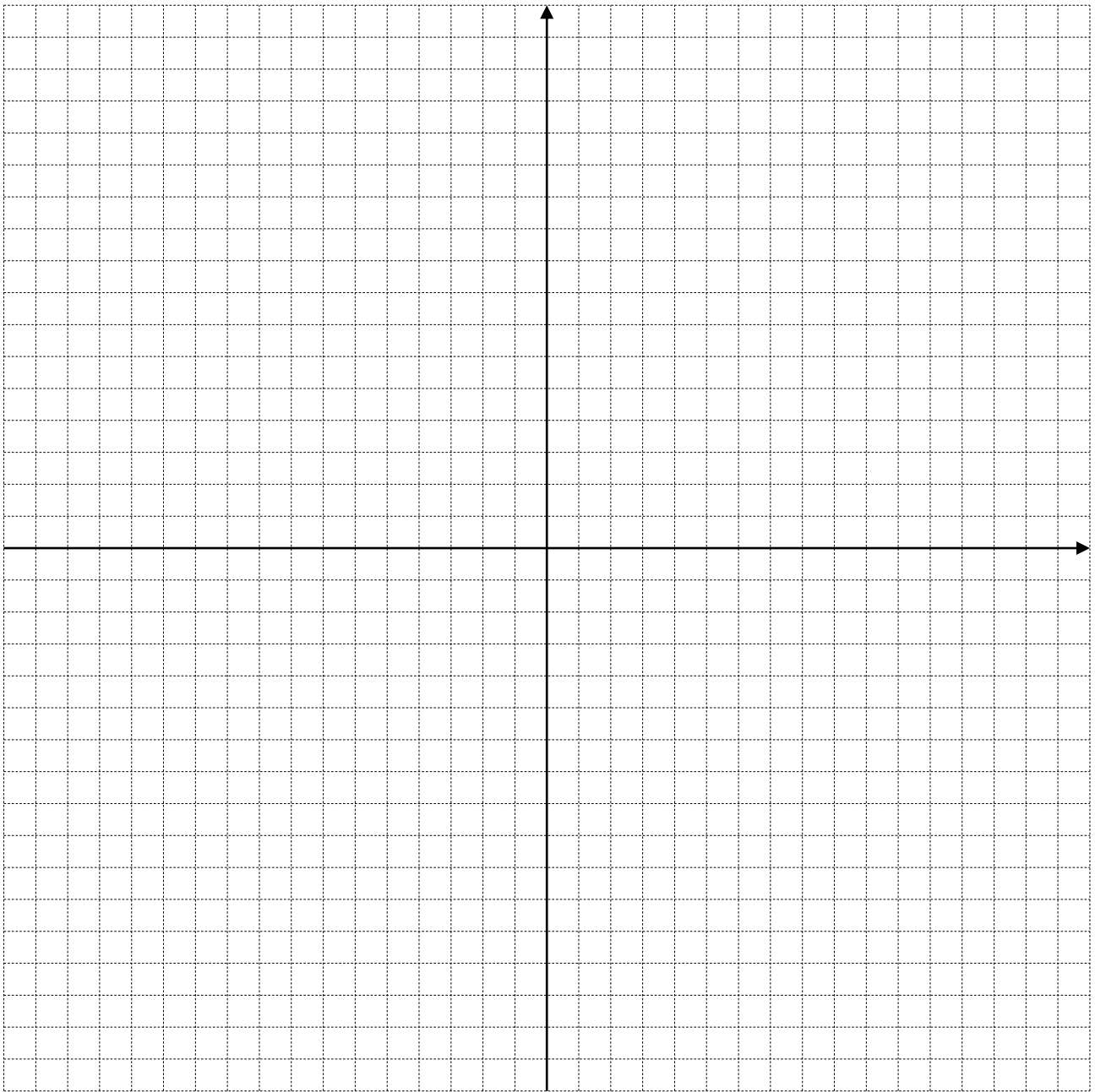
b) Ecrire 13 comme la somme de carrés de deux entiers p et q ($p > q$)

En utilisant la relation (1), déterminer un triangle rectangle d'hypoténuse 13.

En déduire les mesures des côtés d'un triangle rectangle d'hypoténuse 65.

c) Après avoir écrit 5 comme la somme de carrés des deux entiers p et q ($p > q$),

déterminer les mesures des côtés d'un autre triangle rectangle d'hypoténuse 65.



Annexe