Les Mathématiques au collège.
Nouveaux programmes de Sixième et de Cinquième.

Journées Pédagogiques de Novembre 2005

Sommaire

Introduction

Les réunions pédagogiques de novembre sont l'occasion d'échanges riches et fructueux au sujet de l'enseignement des mathématiques en général, elles sont le complément indispensable aux visites d'inspection dans les établissements et aux réunions pédagogiques qui y sont organisées. Outre des informations d'ordre institutionnel et des recommandations d'ordre pédagogique, elles sont aussi l'occasion de faire des mathématiques notamment dans le cadre de la résolution de problèmes.

Depuis 1999, les thèmes suivants ont été traités :

- 1999 : Mathématiques au collège : Nouveaux programmes
- 2000 : Mathématiques au lycée : La nouvelle Seconde
- 2001 : Mathématiques au lycée : Actualités et perspectives
- 2002 : Mathématiques au collège : Unité et cohérence.
- 2003 : Les Mathématiques du collège au lycée : Liaison troisième seconde
- 2004 : Les Mathématiques en classe de seconde.

A la suite de chacune de ces séries de réunions pédagogiques, une brochure a été rédigée et éditée sur le serveur de l'Académie. Ces brochures reprennent l'ensemble de ce qui est dit lors des réunions et contiennent en outre de nombreux travaux réalisés par les participants.

Cette année, les douze réunions organisées dans l'Académie sont consacrées au nouveau programme de sixième qui entre en vigueur cette année et au nouveau programme de cinquième qui entrera en vigueur à partir de septembre 2006. Au delà de ce sujet important, il s'agit aussi de reprendre des réflexions depuis longtemps engagées au sujet de l'enseignement des mathématiques. Les recommandations formulées par l'inspection dans ce cadre n'ont pas changé depuis 1999, et c'est une satisfaction de constater que les textes officiels qui sont parus à l'occasion des nouveaux programmes confirment et amplifient le sens même de ces recommandations.

Le public des professeurs de l'Académie a beaucoup évolué pour des raisons évidentes depuis 1999, il est donc nécessaire de reprendre et réaffirmer quelques points essentiels pour l'enseignement de notre discipline qui demeure, en dépit de ce qui est dit parfois, une discipline centrale qui tire notamment sa légitimité de son histoire.

Déroulement de la demi journée

<table>
<tr><th colspan="2">Titre</th><th>Durée</th></tr>
<tr><td rowspan="2">PREMIERE PARTIE :
Présentation et informations</td><td>Présentation, objectifs de la demi-journée.</td><td>0h10</td></tr>
<tr><td>Informations diverses
• Les Olympiades, les TPE.
• Les maths en L.
• Le Bac et le brevet.
• Les TICE et le serveur.
• Liaison suite
  ▪ Les groupes de secteur.
  ▪ Les diverses expériences dans l’Académie.</td><td>0h20</td></tr>
<tr><td rowspan="3">DEUXIEME PARTIE
Nouveaux programmes en collège, quelles incidences sur l’enseignement des mathématiques ?</td><td>Pourquoi des nouveaux programmes ?
• Des modifications de contenus mineures.
• Des modifications plus profondes.
• Le cas du bac et celui du brevet.
• Quelques extraits essentiels.</td><td>0h30</td></tr>
<tr><td>L’enseignement au jour le jour.
• Les activités
• Les cahiers, le cours, les devoirs.
• La démonstration.</td><td>0h30</td></tr>
<tr><td>Progression et démonstrations
• Sur quelques aspects de la géométrie
• Sur les nombres et le calcul.</td><td>0h15</td></tr>
<tr><td>TROISI EME PARTIE</td><td>Questions réponses</td><td>0h30</td></tr>
<tr><td>QUATRIEME PARTIE Travail commun</td><td>Travail en groupes
• Le choix d’une progression en géométrie
• L’aspect multiforme du raisonnement.</td><td>1h15</td></tr>
<tr><td>CINQUIEME PARTIE</td><td>A propos des nombres
• De nouveaux nombres : les fractions.
• Le calcul numérique</td><td>0h30</td></tr>
</table>

PREMIERE PARTIE
Informations

Ces réunions de novembre, désormais traditionnelles, sont l'occasion de faire avec vous un tour d'horizon des éléments importants qui ont marqué l'enseignement des mathématiques au cours de l'année passée et d'en faire une analyse prospective. Ces éléments peuvent être le fait d'observations effectuées au cours des visites d'inspection ou relever de dispositifs académiques ou nationaux comme les textes officiels ou les examens. Les réunions de cette année ont pour objectif d'étudier en commun les incidences des nouveaux programmes sur l'enseignement des mathématiques au collège.

I) Les Olympiades.

120 candidats seulement s'étaient présentés au concours en 2003, 180 en 2004, 214 en 2005, nous assistons donc à une augmentation très sensible du nombre de candidats. Les copies ont été toutes corrigées par les membres de la commission académique et les 6 meilleurs élèves ont été récompensés lors d'une cérémonie présidée par Madame le Recteur le 6 juillet dernier. Nous souhaitons bien entendu que cette embellie se poursuive, la participation à de telles compétitions académiques est très importante pour la formation des élèves qui seront amenés à être confrontés à des épreuves de ce type dès le baccalauréat et au cours de leurs études supérieures. Comme l'an passé, l'épreuve 2006 sera conçue pour être accessible à tous les élèves des classes de premières générales ou technologiques. Le programme sera donc constitué par le programme de mathématiques de seconde et du tronc commun d'analyse des programmes de première. Il est même possible d'envisager des sujets différenciés selon les séries.

II) Les mathématiques et les travaux personnels encadrés.

Les TPE sont maintenant supprimés en classe de terminale mais ils demeurent en classe de première L, ES et S, comme un enseignement obligatoire qui donnera lieu dès la session 2007 à une épreuve obligatoire anticipée. Seuls les points au dessus de la moyenne seront pris en compte, affectés du coefficient 2, comme dans le cas de feue l'épreuve facultative de terminale.

Il est essentiel en tout cas que notre discipline soit très présente dans les TPE. Il faut en effet montrer que les mathématiques ne sont pas refermées sur elles-mêmes mais sont capables de s'associer, comme elles l'ont fait tout au long de leur très longue histoire, à l'ensemble des activités de l'esprit. Il revient, bien entendu, aux professeurs de faire émerger dans les sujets choisis par les élèves des facettes mathématiques qui leur échapperaient à coup sûr. Il ne s'agit pas de faire acte de virtuosité ni d'aborder des concepts compliqués, il s'agit simplement de donner aux mathématiques la place qui est la leur. La note de service parue à la fin du mois de septembre rappelle d'ailleurs l'importance de conduire des sujets modestes et bien maîtrisés du point de vue des contenus disciplinaires.

Concernant les itinéraires de découvertes, il est tout aussi important, quand ils existent dans les collèges, que les mathématiques y soient présentes pour les mêmes raisons que celles qui ont été décrites plus haut.

III) Les mathématiques en filière littéraire.

1- L'enseignement de spécialité.

L'enseignement de spécialité a été mis en place en septembre 2003 en classe de première et en septembre 2004 en classe de terminale à la place de l'enseignement optionnel. Une conséquence importante a été l'augmentation sensible du nombre d'élèves qui suivent cet enseignement. La durée hebdomadaire est de 3 heures. Le programme spécifique pour cette spécialité entre en vigueur à partir de septembre 2005 en classe de première. Ce programme intéressant met notamment l'accent sur la géométrie dans l'espace et la perspective cavalière ou à point de fuite, il insiste aussi sur les constructions géométriques à la règle et au compas.

2- L’épreuve anticipée mathématiques-informatique.

Cette épreuve a été organisée en juin dernier pour la cinquième fois. Il semble comme l’an passé qu’on se dirige vers un certain équilibre quant à la nature du sujet proposé.

Le sujet 2005 a été en général apprécié par les jurys, un peu moins semble-t-il par les candidats puisque la moyenne académique n’était cette année que de 9,1 avec une grande homogénéité entre les jurys.

Rappelons que le programme de l’enseignement maths-info de 1^{e} L s’appuie notamment sur des éléments de statistiques étudiés principalement au collège et repris en classe de seconde. Ce qui vient d’être dit est donc important dans le cadre de l’information des élèves de seconde ou de troisième qui veulent s’orienter cers des filières littéraires. La face info qui privilégie l’usage des tableurs est une incitation à utiliser ces outils dans le cadre de l’enseignement des mathématiques en classe de seconde notamment dans la partie « Statistiques » mais aussi dans les chapitres réservés aux fonctions et aux suites.

IV) Le baccalauréat S et le baccalauréat ES.

La mise en œuvre de la nouvelle maquette du baccalauréat S s’est achevée cette année avec l’apparition de « *restitutions de connaissances* » appelées brièvement questions de cours. L’épreuve de S comme celle de ES comportait 4 exercices dont nous reparlerons plus loin. La pratique des QCM qui avait suscité de nombreuses interrogations commence à entrer dans les mœurs ; il est à noter que ce type de questionnement devient de plus en plus fréquent dans les manuels notamment lorsqu’il faut faire le point sur des notions antérieures avant d’aborder un nouveau chapitre. Il est très probable que les QCM feront leur entrée dans le cadre des futures épreuves du brevet des collèges..

Les tableaux suivants donnent le détail des résultats obtenus par les élèves dans les séries S et ES, exercice par exercice :

Série ES	Nombre	**Moyennes**	Ex 1/3 QCM	Ex 2/5 Suites/ Stat	Ex 3/7 Fonct	Ex 4/5 Proba
Spécialistes	500	**12,7**	1,7	3,4	4,2	3,4
Non Spécialistes	1395	**10,6**	1,2	3,5	2,9	3,2

Série S	Nombre	**Moyennes**	Ex 1/4 ROC	Ex 2/5 Complexes	Ex 3/5 Proba	Ex4/6 Equa diff
Spécialistes	805	**11,5**	1,6	2,5	2,9	4,5
Non Spécialistes	3093	**7,9**	0,8	1,4	2,1	3,6

Il y a donc 3,6 points de différence de moyenne entre les élèves qui ont choisi la spécialité « mathématiques » et les autres. L’exercice de spécialité a cette année privilégié les spécialistes, mais l’habitude de faire des mathématiques a pour conséquence directe une plus grande dextérité dans l’ensemble des exercices proposés.

L’insuffisance de soin et de rédaction n’a pas été relevée cette année à la différence de l’année passée. Il est bon de rappeler l’importance du soin et de la rédaction dans les épreuves de mathématiques ; ces qualités entrent pour une bonne part dans la compréhension et la rigueur. En outre, le soin et la rédaction, la qualité des explications fournies sont pris en compte dans l’appréciation des copies. S’il est parfaitement admissible que des classes soient globalement faibles, il est en revanche inacceptable que les copies soient mal présentées et que les résultats demandés (hors QCM évidemment) ne soient pas argumentés comme il se doit de la part des élèves, quels que soit leur série ou leur niveau de classe.

V) Les TICE.

Peu de choses à rajouter par rapport à ce qui figure dans la brochure 2003 dont le contenu est rappelé ci-dessous en raison de son importance :

L'intégration dans l'enseignement des mathématiques de séquences assistées par ordinateur est vivement recommandée dans les programmes de collège et de lycée. On lit par exemple :

« *L'informatique, devenue incontournable, permet de rechercher et d'observer des lois expérimentales dans deux champs naturels d'application interne des mathématiques : les nombres et les figures du plan et de l'espace* ».

« *Les tableurs que l'on peut utiliser sur tous le types d'ordinateurs permettent, notamment en liaison avec l'enseignement de la technologie, d'appliquer de manière rapide à des données statistiques les traitements étudiés* ».

« *Un des apports majeurs de l'informatique réside aussi dans la puissance de simulation des ordinateurs* »…

Lors des visites dans les établissements, deux modes d'utilisation sont observables :

- l'ordinateur est manipulé par le professeur devant sa classe
- l'ordinateur est manipulé par les élèves en salle multimédia.

Dans les deux cas, il convient d'être extrêmement vigilant pour que les élèves perçoivent bien le statut réel de ce qu'ils observent. Il convient notamment de ne jamais assimiler une observation même très convaincante avec une démonstration. Il est donc essentiel d'alterner les périodes de travail sur machine et les périodes de réflexion, de démonstration et de rédaction. C'est le sens des séquences qui sont en train d'être mises en lignes sur le serveur de l'Académie dans la rubrique « mathématiques et TICE ». Quatre professeurs ont reçu de notre part des missions pour écrire des « *séquences prêtes à l'emploi* » sur des sujets variés, mais qui sont toutes conçues de la même manière : expérimentation, démonstration, travail à la maison. Ces séquences sont à « *géométrie variable* » et pour l'instant concernent le nombre d'or sous des aspects algébriques et géométriques, la symétrie centrale, la translation, les théorèmes de Thalès et de Pythagore, des problèmes d'optimisation, des courbes originales, des problèmes d'aires etc. N'hésitez pas à utiliser ces ressources qui sont entièrement à votre disposition et qui sont téléchargeables.

VI) Les liaisons inter cycles.

Elles sont indispensables pour assurer une bonne continuité entre l'école primaire et le collège ou entre le collège et le lycée donc la réussite des élèves et la limitation des redoublements dont la plupart est la conséquence d'une mauvaise adaptation à de nouveaux rythmes et à de nouveaux contenus. Deux types d'actions sont conduits dans ce cadre au sein de l'Académie.

1- <u>Les groupes de secteur</u>.

Ce sont des groupes formés à l'initiative d'un professeur ou d'une équipe. Il s'agit par exemple de rassembler un groupe constitué de professeurs d'un ou plusieurs lycées et des collèges de rattachement, ou d'un ou plusieurs collèges et des écoles de rattachement. Ce groupe travaille sur des objectifs didactiques ou pédagogiques qu'il a lui-même définis, il produit des documents dont certains sont actuellement en ligne. De tels groupes existent au Creusot, à Montceau, à Joigny, à Tonnerre, à Chalon.

Bien entendu la constitution de tels groupes est encouragée et sera soutenue dans le cadre notamment des prochains Plans Académiques de Formation.

2- Les expérimentations de liaison.

Ces expérimentations concernent tous les établissements (collèges et lycées) d'un secteur géographique bien circonscrit, elles mettent en jeu plusieurs disciplines (Mathématiques, Français, SVT, Histoire, Langues vivantes, selon les endroits). Il s'agit d'abord de faire en sorte que des professeurs de collège et de lycée travaillent ensemble à la constitution de documents mathématiques afin d'une part que les professeurs de seconde aient le plus tôt possible une vision précise des compétences de leurs élèves, et d'autre part que les élèves arrivent en seconde en ayant préparé leur rentrée grâce à un travail effectué durant les vacances. Pour le moment, en mathématiques, les documents crées par les professeurs **pour leur groupe** (il ne s'agit surtout pas de généraliser de tels documents) sont :

- Un document d'évaluation
- Un devoir à la maison.

L'existant et le prévisionnel sont résumés dans le tableau suivant :

Localisation	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Nevers : 3 lycées et 12 collèges	Maths et Lettres	Maths et Lettres	Maths, Lettres, SVT
Montceau-Le Creusot 3 lycées, 10 collèges		Maths, Lettres,	Maths, Lettres, SVT
Chalon 1 lycée et 5 collèges		Maths, Lettres, SVT	Maths, Lettres, SVT, Histoire
Chalon 5 lycées et tous les collèges de rattachement			Maths, Lettres, SVT, Histoire
Sens 1 lycée et les collèges de rattachement			Maths, Lettres, SVT, Histoire
Bassin de Semur			Maths, Lettres, SVT, Histoire, Langues

DEUXIEME PARTIE
Nouveaux programmes
Nouveaux contenus, Nouvel enseignement ?

I) Pourquoi des nouveaux programmes pour le collège ?

Il y a, à cette réécriture, trois raisons qui sont bien apparues dans les travaux de la commission présidée par le professeur Bach au cours des années passées.

1) Première raison

Les horaires de mathématiques ont été modifiés (pas forcément dans le bon sens) depuis 2000 en raison notamment de l'introduction au collège des itinéraires de découverte. Les témoignages comme quoi il devenait difficile de mener à son terme le programme de quatrième ont sans doute joué un rôle essentiel dans cette modification. Il faut savoir néanmoins que dans au moins 30% des collèges de l'Académie, les horaires en quatrième sont restés, à l'initiative du chef d'établissement, à hauteur de 4 heures hebdomadaires. Il s'agissait donc, sans altérer la cohérence tant de fois signalée des actuels programmes, de corriger quelques anomalies (l'absence d'exigence sur la bissectrice et le cercle inscrit par exemple) et d'opérer quelques glissements de notions délicates.

2) Deuxième raison

Il convient de réaffirmer l'importance de la cohérence de l'enseignement (les mathématiques enseignées à tout niveau sont de « *vraies mathématiques* »).

Il s'agit essentiellement de mieux travailler sur les liaisons dans le cadre :

a) des programmes de mathématiques rénovés de l'école primaire et du collège.

Comme c'est le cas à chaque changement de cycle et particulièrement entre CM2 et 6^{e} en raison des corps différents d'enseignants et d'inspecteurs, il existe une méconnaissance mutuelle des contenus et des exigences. Cette méconnaissance est nuisible pour les élèves à plusieurs titres :

- risque de redite à l'identique,
- risque de discordance dans les définitions et le vocabulaire…

b) des interconnexions entre les mathématiques et les autres disciplines.

Comme cela a été maintes fois rappelé, les mathématiques, au cours de leur histoire, ont très largement interféré avec les autres disciplines, et particulièrement la physique au XVIII^{e} siècle. Ces interactions ont grandement participé au développement des mathématiques elles mêmes. D'autre part, les mathématiques conservent leur spécificité (dont il faut faire part aux élèves notamment par des allusions historiques) qui a permis, parfois longtemps après le développement d'une théorie, parfois de manière inattendue, de permettre le développement des autres sciences (algèbre de Boole, théorie des graphes, arithmétique, théorie des catastrophes, des ensembles flous,…). Développer aux yeux des élèves les liens entre les mathématiques et les autres domaines de la pensée est aussi un moyen d'en renforcer la crédibilité et la spécificité.

3) Troisième raison : Pallier des insuffisances.

C'est un sujet essentiel qui sera développé plus loin. Une des raisons fondamentales de ces changements de programmes est de redéfinir dans un cadre rénové, les conditions et les nécessités d'un enseignement des mathématiques convaincant et séduisant. L'intervention trop tardive de la démonstration et du raisonnement, souvent sclérosés dans des architectures lourdes et complexes, l'usage non pertinent et non contrôlé de la calculatrice, certaines confusions dans la présentation des nombres et des opérations, ont largement contribué d'une part à créer chez les élèves des incompréhensions majeures et un désintérêt pour une discipline quelque peu vidée de son sens. Cette idée sera largement développée ultérieurement à l'aide d'exemples.

II) Les modifications.

1) Modifications dans les contenus.

Les modifications de contenu sont relativement mineures en sixième et en cinquième, la structure générale des programmes demeure inchangée et se décline en quatre grandes parties comme dans les précédents :

(1) Organisation et gestion de données ; fonctions,
(2) Nombres et calculs,
(3) Géométrie,
(4) Grandeurs et mesures.

Les modifications de contenus peuvent se résumer ainsi :

	Classe de sixième		**Classe de cinquième**	
	Suppressions	*Ajouts*	*Suppressions*	*Ajouts*
(1)				*Tableur et grapheur*
(2)	Introduction des relatifs			Introduction des relatifs
(3)		Cerf volant Diagonales des quadrilatères Médiatrices et équidistance		Hauteurs et médianes
(4)				

2) Quelques remarques à l'observation de ce tableau.

a) L'étude de données statistiques justifie l'utilisation d'un tableur ou d'un grapheur ; c'est un domaine particulièrement adapté à l'outil informatique et propice à la validation de certaines compétences du B2i. Ces activités sont donc particulièrement recommandées dans le cadre de l'intégration des outils TICE dans l'enseignement, lorsque les possibilités locales existent.

b) Concernant les nombres relatifs, certaines incohérences dans la répartition des notions enseignées entre la Sixième la Cinquième ont été signalées à maintes reprises. Les relatifs de Sixième étant plutôt des températures, ceux de Cinquième, des déplacements. Le fait de replacer en Cinquième l'étude globale (définition et somme) des relatifs libère du temps en Sixième et facilite un apprentissage plus cohérent en Cinquième. Cela étant, le travail effectué en Sixième sur les demi- droites graduées peut utilement anticiper la notion de nombre relatif qui sera développée en Cinquième.

c) Cerfs volants, médiatrices, bissectrices,… Le temps dégagé en classe de Sixième par le « glissement » des relatifs en Cinquième doit être mis à profit pour développer le raisonnement et la démonstration. Le rôle de ces ajouts qui doivent y contribuer sera développé plus loin.

3) Les modifications dans l'état d'esprit.

a) La rédaction des nouveaux programmes est plus détaillée et plus précise que celle des précédents. Un effort important a été accompli pour mettre en lumière les liens signalés plus haut avec l'école primaire et avec les autres disciplines. Les parties qui sont adaptées à la validation des compétences du B2i sont également signalées.

b) Des recommandations concernant les démonstrations qu'il est opportun de conduire et les preuves qu'il s'agit de donner sont clairement explicitées. Ce sont ces modifications qui sont au cœur de notre travail d'aujourd'hui.

c) Le rôle du calcul et notamment celui du calcul mental est fortement réaffirmé. (Voir le texte sur le calcul en ligne sur le site). On constate effectivement d'une part que le manque de dextérité calculatoire empêche les élèves de développer des raisonnements probants. La trop grande hésitation dans les opérations simples, qu'elles soient numériques ou algébriques masque, prend le pas ou fausse le déroulement et l'interprétation d'un raisonnement déductif. L'usage abusif des calculatrices est un handicap à la compréhension et au sens des calculs et nuit à l'appréciation d'ordres de grandeurs. C'est particulièrement le cas lorsqu'il s'agit des opérations sur les relatifs ou sur les rationnels.

III) Le cas du baccalauréat et celui du brevet.

1) Le baccalauréat.

Depuis deux ans les épreuves du baccalauréat S et du baccalauréat ES sont modifiées toujours dans le sens d'une pratique plus réfléchie et plus contrôlée des mathématiques. Les exercices suivants qui ont été proposés au baccalauréat en 2004 et en 2005 illustrent bien cette tendance :

- Exercice 1 2004 (conjecture et démonstration)
- Exercice 3 2004 (QCM sans justification)
- Exercice 1 2005 (ROC et QCM avec preuve ou contre exemple).

Ces questions ont été un peu déstabilisantes pour les élèves et aussi les professeurs mais, de l'avis de la majorité, elles vont dans le bon sens, elles rappellent que le cours s'apprend et que la réflexion et le souci de la preuve sont au cœur de l'activité mathématique indépendamment de toute sclérose inhérente à des sujets trop stéréotypés et figés comme ils existent encore dans certaines séries.

2) Le brevet.

Dans le même ordre d'idée, des modifications très modestes mais significatives ont été incluses dans le sujet du brevet de cette année afin de rendre les élèves plus « *responsables* » par rapport à leurs calculs et plus critiques par rapport à leurs résultats. En revanche, le problème a été allégé pour que les élèves moyens puissent achever l'épreuve ce qui a été le cas général. Les échos positifs en provenance d'autres académies (Grenoble par exemple) sont en accord avec les avis exprimés à Dijon. Les réserves qui ont été émises concernent l'absence de certains points de programme (comme la trigonométrie) devront être prises en compte cette année. De quoi s'agissait-il ?

ACTIVITES NUMERIQUES   Exercice 1 :

Alain, Bernard et Charlotte décident de faire chacun une question de l'exercice suivant:

$A = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{9}{16}$; $B = \frac{16 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^{4}}{24 \times 10^{-3}}$ et $C = \sqrt{63} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{28}$

1. Calculer A et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. Calculer B et donner le résultat sous forme d'un nombre entier.
3. Ecrire C sous la forme $a\sqrt{7}$, a étant un nombre entier relatif.

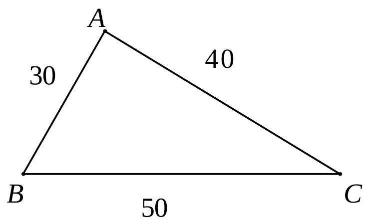
Alain calcule A et propose $A = \frac{21}{64}$; Bernard calcule B et propose $B = 2 \times 10^{-2}$; Charlotte calcule C et propose $C = -5\sqrt{7}$. Ces réponses vous semblent-elles satisfaisantes ? Justifier vos affirmations.

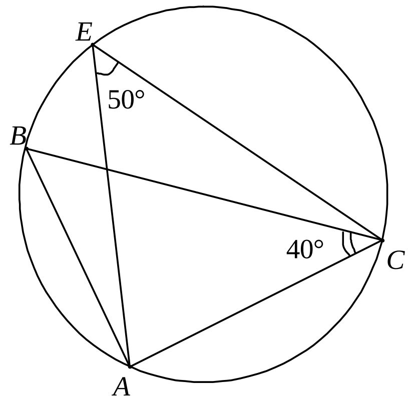
ACTIVITES NUMERIQUES   Exercice 2 :

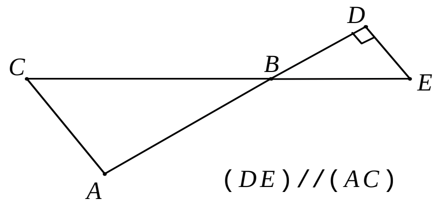
On considère l'expression $E = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2)$.

1. Développer et réduire l'expression E.
2. Factoriser $4x^2 - 9$. En déduire la factorisation de l'expression E.
3. a) Résoudre l'équation $(2x + 3)(3x - 5) = 0$.
   b) Cette équation a-t-elle une solution entière ?
   c) Cette équation a-t-elle une solution décimale ?

ACTIVITES GEOMETRIQUES   Exercice 1 :
Démontrer, pour chacune des trois figures ci-dessous, que le triangle *ABC* est un triangle rectangle en utilisant les informations fournies.







Ce n’est certes pas la révolution, mais la modification des épreuves terminales du collège et du lycée entraîne nécessairement une modification de l’enseignement des mathématiques en cohérence avec les préambules des nouveaux programmes dont je souhaite rappeler quelques extraits avant d’en étudier précisément les incidences sur la pédagogie au jour le jour.

IV) Quelques extraits essentiels.

1) <u>Introduction commune à l’ensemble des disciplines scientifiques</u>.

Les mathématiques fournissent des outils puissants pour modéliser des phénomènes et anticiper des résultats, elles se nourrissent des problèmes posés par la recherche d’une meilleure compréhension du monde, leur développement est également pour une très large part, liée à la capacité de l’être humain, à explorer des concepts théoriques.

La perspective historique donne une vision cohérente des sciences et des techniques et de leur développement conjoint. Elle permet de présenter les connaissances scientifiques comme une construction humaine progressive et non comme un ensemble de vérités révélées.

Au terme de la scolarité obligatoire, les élèves doivent avoir acquis les éléments de base de la pensée mathématique. Celle-ci repose sur un ensemble de connaissances solides et sur des méthodes de résolution de problèmes et des modes de preuve (raisonnement déductif et démonstrations spécifiques).

2) <u>Introduction générale pour le collège en Mathématiques</u>

A travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l’apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu’est une véritable activité mathématique :

- *Identifier et formuler un problème,*
- *Conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples*
- *Bâtir une argumentation,*
- *Contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié,*
- *Mettre en forme une solution.*

a) <u>À propos de l’enseignement</u> :

Il importe d’éviter l’émiettement et de faciliter la bonne structuration des savoirs et des méthodes, en particulier en vue d’une initiation progressive au raisonnement déductif.

Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l’histoire des mathématiques.

b) <u>À propos de la démonstration, le paragraphe 3.4 est à cet égard essentiel</u> :

La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.

A cet égard, deux étapes doivent être distinguées : la recherche et la production d'une preuve, d'une part, la mise en forme de cette preuve, d'autre part. Le rôle essentiel de la première étape (production d'une preuve) ne doit pas être occulté par des exigences trop importantes sur la deuxième (mise en forme de la preuve). Pour cela, la responsabilité de produire les éléments d'une démonstration doit être progressivement confiée aux élèves. A partir des éléments qu'ils fournissent, la mise en forme peut, elle, être réalisée collectivement, avec l'aide de renseignant.

La prise de conscience de ce qu'est la recherche et la mise en œuvre d'une démonstration est également facilitée par le fait que, en certaines occasions, renseignant se livre à ce travail devant la classe, avec la participation des élèves.

Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l’enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis.

c) <u>À propos des devoirs à la maison</u>.

En étude ou à la maison, ce type de travail est nécessaire non seulement pour affermir les connaissances de base et les réinvestir dans des exemples simples mais aussi pour en élargir le champ de fonctionnement et susciter ainsi de l'intérêt pour l'activité mathématique. Il contribue aussi à habituer l'élève à l'indispensable régularité d'un travail autonome, complémentaire de celui réalisé avec le professeur. Il peut prendre diverses formes :

- *résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude de la leçon pour asseoir les connaissances ;*
- *travaux individuels de rédaction pour développer les capacités d'expression écrite et la maîtrise de la langue ;*
- *résolution de problèmes variés (exercices de synthèse, énigmes, jeux mathématiques...) pour mettre en œuvre des démarches heuristiques en temps non limité ;*
- *construction d'objets géométriques divers (frises, pavages, solides,...) en utilisant ou non l'informatique ;*
- *lectures ou recherches documentaires, en particulier sur l'histoire de la discipline ou plus généralement des sciences pour enrichir les connaissances*
- *constitution de dossiers sur un thème donné.*

La correction individuelle du travail d'un élève est une façon d'en apprécier la qualité et de permettre à son auteur de l'améliorer, donc de progresser. Le travail personnel proposé en classe aux élèves peut prendre chacune des formes décrites ci-dessus, en tenant compte, chaque fois, de la durée impartie. Il faut veiller à un bon équilibre entre ces diverses activités.

Ces travaux peuvent être différenciés en fonction du profil et des besoins des élèves. 3.7.

Tout cela est bien dans la droite ligne de ce qui a été dit dans cette académie depuis 1998, c’est une satisfaction de lire dans des textes officiels l’ensemble de ces recommandations qui d’ailleurs ont fait leur preuve sur le terrain chaque fois qu’elles sont mises en œuvre et cela presque indépendamment du niveau moyen des classes. La consistance des mathématiques en assure la crédibilité et l’intérêt que les élèves leur portent.

Il s’agit maintenant d’étudier les conséquences de ces instructions dans l’enseignement au quotidien. La manière dont certains manuels sont rédigés prend largement en compte cette évolution, comme dans les deux exemples suivants :

Livre 1 : Les tables de multiplication sont reproduites sur la page de garde avec la mention : « *Il est très important de connaître par cœur les tables de multiplication* ». Puis dans un dialogue imaginaire entre le professeur et une élève on lit : «*Tu vas avoir un cours précis que tu devras apprendre, il faudra connaître les définitions, les notations, les propriétés…* ». En revanche, le statut des énoncés n’est pas clairement spécifié.

Livre 2 : Présence de très nombreux points d’histoire et de nombreux devoirs à la maison estampillés comme tels à la fin de chaque chapitre.

Cela étant, les livres ont tous leurs points forts et leurs points faibles, c’est au professeur à conduire sa progression et l’organisation de son cours en fonction d’une réflexion conceptuelle fondée sur le sens même des mathématiques.

V) L’enseignement au jour le jour.

1) Les activités préparatoires.

Elles ont pour objectif de mobiliser les connaissances et les savoirs faire antérieurs des élèves pour introduire de nouvelles notions ou de nouvelles méthodes. Il est précisé en outre dans le texte officiel que « *Toute activité doit être complétée par une synthèse* ». Les activités s’inscrivent dans la phase d’expérimentation de l’activité mathématique, elles doivent donc être conçues en fonction de quelques critères simples mais essentiels et qui relèvent d’une réflexion mathématique théorique :

- Leur objectif doit être clairement explicité, par exemple :
  - « Nous allons étudier comment ajouter deux nombres relatifs »,
  - « Nous connaissons l’inégalité triangulaire, mais dans certains triangles, il est possible de préciser d’autres relations métriques »….
- Elles doivent effectivement préparer la nouveauté qu’elles sont censées introduire :
  - Le produit de fractions n’est pas bien introduit par des considérations de fractions de fractions ou par des décomptes de petits carreaux.
  - La notion de fonction n’est pas bien introduite par la notion de fonction affine.
- Elles doivent être convaincantes, ne pas apparaître comme artificielles ou inutilement compliquées, mais permettre de résoudre des questions jusqu’alors insolubles:
  - En algèbre, la formule de distributivité n’est pas bien introduite avec un exemple numérique $(2+3)\times(4+5)$.
  - La notion de fonction n’est pas bien introduite par l’étude d’un petit tableau de proportionnalité.
- Elles doivent favoriser l’activité mathématique et convaincre de la nécessité de démontrer en créant un véritable questionnement mathématique à l’issue de l’expérimentation.
- Elles doivent être assez brèves pour laisser le temps de la synthèse et permettre les premières mises en œuvre.

2) Le cours, les cahiers.

La nécessité du cours est réaffirmée, il est le résultat de la synthèse à la suite d’une activité ou il est le fait du professeur comme c’est le cas lorsque la notion que l’on souhaite introduire ne peut pas être abordée par le biais d’une activité préparatoire. C’est le cas par exemple de notions nouvelles qui ne s’appuient pas sur des connaissances antérieures ou qui en sont trop éloignées du point de vue conceptuel, elles sont rares au collège. (Les nombres complexes en terminale…). Dans tous les cas il appartient au professeur de préciser la problématique, de la situer dans un contexte historique et surtout de préciser le statut des énoncés qui seront cités et notés.

Il est donc particulièrement important que les élèves disposent d'un cahier de cours qu'ils tiennent eux-mêmes. Les habitudes de chacun en matière de présentation et d'écriture sont des éléments importants de mémorisation et d'appropriation des contenus. Rappelons que le cahier de cours est conçu comme un véritable ouvrage de mathématiques, il inclut les définitions, les propriétés et les théorèmes dont le statut (admis ou démontré) doit être explicité, quelques démonstrations quand elles sont exemplaires, quelques exemples et contre exemples. Bien entendu le cours doit être appris, il est bon qu'un moment de la séquence suivante soit consacré à un questionnement oral des élèves au sujet de la leçon. Il est enfin important que ces cahiers soient visés par le professeur, éventuellement notés, il n'est pas aberrant que la prise en compte des cahiers entre dans l'évaluation globale des élèves.

3) Raisonnement déductif, démonstration, etc.

Ils sont constitutifs des mathématiques et c'est une mission essentielle du professeur de mathématiques de conduire les élèves à les pratiquer et si possible avec intérêt et plaisir. Cela suppose une attention de chaque instant, il est si facile de passer d'une observation même approximative à la généralité, mais encore faut-il disposer des outils nécessaires.

Il existe de nombreuses similitudes entre la démarche du physicien et celle du mathématicien. En fait seule la dernière phase est distincte car à la suite d'une expérimentation, le physicien proposera une loi fondée sur la conjecture alors que le mathématicien se posera le problème de la démonstration. Sans cette mise en évidence de cette différence didactique fondamentale entre les disciplines expérimentales (physique, biologie, économie…) et les mathématiques, l'enseignement des mathématiques perd beaucoup de son sens et donc son intérêt aux yeux des élèves.

a) Quelques pistes favorables au développement de l'activité mathématique.

- Etre méfiants vis-à-vis de nos propres pré-requis qui incitent souvent à des conclusions prématurées et qui enlèvent à la démarche expérimentale une grande partie de son sens.
- Multiplier les contre exemples (somme et produit de fractions par exemple).
- Se poser la question de la réciproque (le cerf volant n'est pas un losange).
- Associer autant que faire se peut, des allusions historiques.
- Evoquer des problèmes historiques non résolus. (quelques conjectures comme celle de Goldbach, de Syracuse, des quatre couleurs...).
- Proposer des activités qui entretiennent le doute (puzzle de Fibonacci).

Les nombres de Fibonacci sont ceux de la suite (u_n) définie par $u_0=u_1=1$ et pour tout $n\geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ Soit 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55…Considérons trois nombres entiers successifs de la précédente suite par exemple 3,5,8 et découpons le puzzle ci dessous (fig 1) après l'avoir représenté sur papier quadrillé. Peut-on former un rectangle de côtés 13 et 5 avec les morceaux obtenus ?

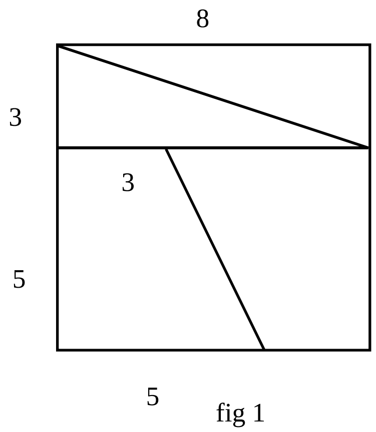


fig 1

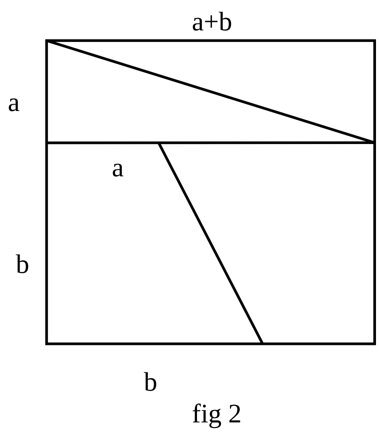


fig 2

b) Le choix de la progression.

C'est assurément un élément déterminant pour la cohérence et la qualité de l'enseignement. Les nombreuses observations effectuées dans les classes et la réflexion conduite sur ce point durant plusieurs années et développées notamment au cours des réunions inter-académiques de Nancy, conduisent aux recommandations suivantes :

- Eviter autant que possible les révisions stricto sensu, elles sont souvent stériles et dévoreuses de temps, elles replongent le plus souvent l'élèves dans le cadre de ses anciens échecs.
- Il est indispensable que les « êtres » mathématiques étudiés tout au long de la scolarité soient d'emblée définis précisément et que cette définition soit immuable. C'est d'ailleurs un des thèmes fréquemment travaillés lors des liaisons CM2 6^{e} ou 3^{e} 2nd.
- Il n'est pas souhaitable qu'un chapitre d'une année donnée ait le même intitulé qu'au cours d'une année antérieure. Par exemple, en troisième, il existe un chapitre intitulé « fonctions affines », un tel chapitre n'a pas lieu en seconde, les fonctions affines étant alors d'utiles illustrations de notions plus complexes.
- La reprise d'objets antérieurement établis doit s'accompagner d'enrichissements, c'est un moyen d'en favoriser la connaissance et la maîtrise par les élèves.

Tout cela n'est pas sans incidence dans le choix de la progression car selon la nature de ces choix, l'enseignement sera plus ou moins pertinent. Les mathématiques ont une grande cohérence parfaitement assurée par les actuels programmes du collège et du lycée. L'étude d'une notion à un niveau « *n* » s'appuie donc sur des acquis antérieurs, les enrichit, interagit avec d'autres notions et ouvre des perspectives.

- *Exemple 1 : L'équation du second degré en première :*
    - *On en a déjà résolu dès la classe de troisième.*
    - *On pourrait le faire « à la main » à chaque fois.*
    - *On veut une formule générale.*
    - *Du coup, on peut aller plus loin vers les degrés 3, 4.*
    - *Attention, cela se termine vite…(point d'histoire).*
- *Exemple 2 : Le sens de variation des fonctions en première:*
    - *On sait faire en seconde sur des fonctions de référence,*
    - *On ne peut pas le faire simplement…*
    - *La dérivation et ses limites…*

On pourrait évidemment continuer ainsi très longtemps, nous verrons dans la dernière partie et dans la partie « *travaux pratiques* », quelques illustrations au collège.

4) Les devoirs.

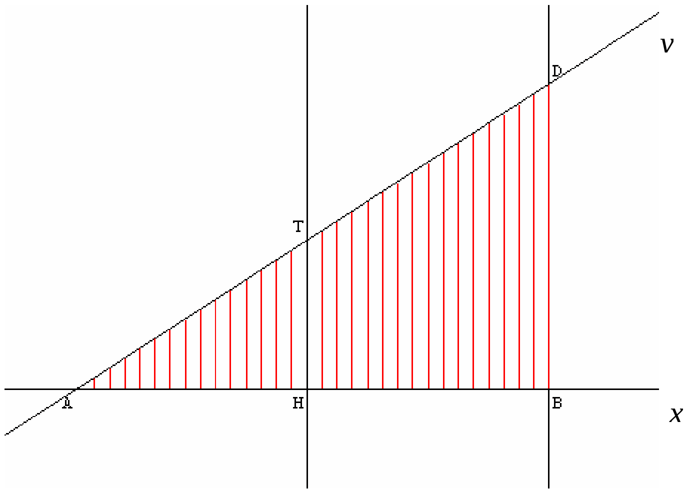
Leur importance est rappelée dans les textes précédents. Les recommandations qui en découlent sont semblables à celles qui ont déjà été formulées dans les précédentes brochures et lors des réunions en établissement. Les devoirs sont l'occasion de rédiger des démonstrations, de développer des capacités de recherche et d'expérimentation, bref, de conduire une véritable activité mathématique.

5) Les TICE.

Elles font désormais partie de l'environnement des élèves. Il convient pourtant de veiller à leur pertinence pédagogique. L'usage d'outils informatiques (logiciels de simulation ou de construction géométrique, tableurs ou grapheurs) doit être soumis à une réflexion précise qui peut se résumer par : « Quelle plus value » ?

La tentation est parfois grande de partir de l'outil que l'on a à sa disposition et de privilégier l'outil par rapport à la séquence quitte à ce que son utilisation soit peu pertinente. Par exemple, il arrive qu'un vidéoprojecteur associé à un ordinateur n'ait d'autre utilité que de projeter des phrases de cours précédemment saisies comme on le ferait avec un rétroprojecteur et le traditionnel « cache ». On peut aussi se s'interroger sur la portée pédagogique de ces usages dans le cadre du cours, mais c'est un autre sujet. De manière schématique, insistons sur le fait qu'une séquence est d'abord constituée d'un « *noyau dur* » conforme à la didactique de la discipline. Le professeur en définit la stratégie. Appuyons nous encore sur l'introduction du cosinus d'un angle aigu en quatrième et supposons qu'on ait choisi une démarche qui s'appuie sur une expérimentation. La séquence se déroulera donc comme suit :

- Chaque élève construit au brouillon une figure du type ci-dessous et calcule les rapports AH/AT . On privilégie ici les projections sur la demi-droite [Ox), les résultats obtenus en projetant sur la demi-droite [Oy) seraient les mêmes par symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.



- Le professeur organise une synthèse des résultats obtenus, on aboutit à un tableau de valeurs assez disparates qui se prête à un débat intéressant où le professeur développera une vraie problématique mathématique et s'interdira surtout de conclusions précoces fondées sur ses propres acquis. A ce moment là, l'usage de l'outil informatique apporte une plus value mathématique évidente liée à la connaissance des nombres, mais ne permet pas de répondre à la problématique fondamentale « les rapports sont-ils constants ? ». Simplement, les raisons des disparités mises en évidence à la suite des constructions des élèves sont-elles plus claires.
- Mise en évidence de la nécessité d'une démonstration qui ne peut s'appuyer que sur des théorèmes du cours à moins qu'on ne soit contraint d'admettre le résultat mais il faudra le préciser comme cela est demandé dans les textes. Dans le cas présent, on voit bien que la version « Thalès » de quatrième devra être traitée au préalable si l'on veut mener à son terme cette démonstration.

On peut donc considérer que les différents matériels disponibles au sein de la classe (tableau noir ou blanc, instruments de géométrie, calculettes, volumes géométriques, rétroprojecteur, vidéoprojecteur, ordinateur, tableau interactif…) définissent une famille de cercles emboîtés permettant un enrichissement progressif de la séquence sans en altérer le sens mathématique, bien au contraire. Il convient alors de s'imposer de ne passer d'un cercle au cercle suivant qu'en cas de nécessité c'est-à-dire lorsqu'il y aura vraiment plus-value pédagogique. Par exemple, il n'est pas évident que l'usage de Géospace soit d'emblée pertinent lorsqu'on étudie au collège les volumes de l'espace. En revanche, l'usage d'une feuille de calcul peut aider à comprendre les notions de développement décimal ou de convergence de suites, etc.

Concernant les séquences conduites en salle informatique, rappelons que de nombreuses séquences sont disponibles sur le serveur dans la rubrique mathématiques et TICE.

VI) Progression et démonstration.

La succession des programmes, par les nouveautés qu'ils apportent aussi bien du point de vue des notions abordées que de celui des méthodes qu'ils suscitent, s'apparente un peu au jeu de meccano. Lorsque l'on acquiert une nouvelle boîte, un désintérêt évident se porte sur ce qui était constructible avec l'ancienne même si la perfection n'était pas acquise. En revanche, la nouvelle boîte permettra des constructions plus ambitieuses susceptibles en même temps de permettre une meilleure compréhension et une meilleure maîtrise des activités antérieures.

Si l'on accepte cette image, on en déduira que ce sont les nouveautés d'un programme qui seront les moteurs de l'activité mathématique d'une année donnée en

- valorisant le passage dans la classe supérieure,
- permettant l'accès à une activité plus riche,
- assurant une meilleure maîtrise des notions antérieures

Il convient donc impérativement de traiter ces nouveautés le plus tôt possible. Voyons quelques exemples.

1) <u>En classe de sixième</u>.

a) <u>La symétrie axiale et les figures</u>.
Dans bien des cas et c'est d'ailleurs explicitement noté dans les commentaires du programme, la symétrie axiale permet d'élaborer des preuves notamment au sujet des propriétés des quadrilatères .

b) <u>Les fractions et la proportionnalité</u>.
La question des rationnels est centrale car c'est la première fois que les élèves vont manipuler des nombres dont ils ne peuvent pas expliciter une écriture exacte au-delà du symbole qui les représente : 2/3 , 5/7. En revanche, ce sont des nombres qui peuvent être construits à la règle et au compas ce qui assure comme au temps des Grecs, leur existence. Il est très important de présenter cette nouveauté majeure aux élèves car ils seront de plus en plus souvent confrontés à cette difficulté de bien différencier un nombre et l'une de ses valeurs approchées. (Racines carrées, π, e et bien d'autres encore).

2) <u>En classe de cinquième</u>.

a) <u>La symétrie centrale, les parallélogrammes et les angles</u>.
La symétrie centrale doit être introduite en cohérence avec la symétrie orthogonale par le biais de la composition, c'est l'objet par exemple d'un excellent devoir à la maison. Elle sera ensuite systématiquement utilisée pour démontrer les propriétés du parallélogramme et celles des angles.

b) <u>Les relatifs et les équations</u>.
Les relatifs sont désormais introduits en cinquième et l'addition est étudiée dans la foulée. C'est un moyen de donner une nouvelle cohérence à cette notion importante où l'on doit veiller encore à bien convaincre les élèves de l'aspect nouveau d'une notation du type (+3) qui est bien autre chose qu'un assemblage de symboles. Je rappelle encore une fois qu'il est évidemment souhaitable de garder ces notations le plus longtemps possible et que l'intérêt essentiel de l'introduction des relatifs est la disparition de la soustraction.

TROISIÈME PARTIE :
Le choix d'une progression dans le cours de Géométrie plane

A – INTRODUCTION

Développer des compétences de rigueur (sorte d'alliance entre les capacités d'analyse et l'honnêteté intellectuelle) est l'un des enjeux du cours de mathématiques et, bien au-delà, nul ne saurait nier que la formation à la pensée logique participe à la formation citoyenne. Dans cette affaire, il est primordial que l'enseignant soit vigilant (en corrigeant avec bienveillance les erreurs de raisonnement, de formulation ou de notation commises par les élèves, mais sans excès pour ne pas les décourager) ; mais avant tout, il est indispensable qu'il donne l'exemple. C'est dans cet ordre d'idées que l'articulation dans la présentation des notions de géométrie au Collège est tout à fait significative. La philosophie des mathématiques menée par le professeur doit rompre avec la démarche de validation visuelle et descriptive de l'école primaire : un rectangle n'aura pas quatre angles droits et des côtés opposés de même longueur parce que cela se voit, mais il a quatre angles droits parce que telle est sa définition, et il a ses côtés opposés de même longueur parce que les propriétés admises de la symétrie axiale permettent de démontrer cette propriété.

Le choix d'une progression cohérente en géométrie est indispensable si l'on veut éviter la « leçon de choses », mais délicat, pour plusieurs raisons. La première relève d'une difficulté intrinsèque à la matière : concevoir un enchaînement cohérent partant de définitions explicitées et de résultats clairement admis pour en démontrer d'autres (appelés théorèmes) demande une vision synthétique, et nécessite parfois quelques essais et tâtonnements. D'autre part, l'écriture des programmes n'impose pas de progression privilégiée ; plusieurs progressions étant possibles et concevables, le programme laisse toute latitude à chacun d'élaborer la sienne propre. Enfin, les manuels d'élève ne proposent pas le plus souvent ni un enchaînement réfléchi des notions, ni un statut clairement affiché des énoncés (définition, résultat admis, résultat démontré).

Pour présenter une certaine cohérence et respecter la philosophie des programmes, quelques règles de conduite doivent présider au choix d'une progression en géométrie :

- les objets usuels méritent d'être définis au départ, de façon simple et minimale, mais en respectant l'acquis des élèves (par exemple un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés égaux, un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits) ;
- certains énoncés doivent être clairement admis, d'autres démontrés à partir de ceux-là ;
- les transformations (symétrie axiale, centrale) doivent être introduites au plus tôt dans l'année, et mises en jeu le plus souvent possible pour justifier des propriétés connues des figures, ou pour en obtenir de nouvelles propriétés.

Enfin, il faut souligner que la conception d'un enchaînement admettant un nombre minimal de propriétés pour en démontrer d'autres relève de choix didactiques, mais qu'il est souhaitable d'adapter la démarche pédagogique à sa classe : tel résultat « démontrable », mais jugé trop technique ou trop difficile peut être admis avec certaine classe, tel autre résultat dont la preuve est trop longue peut être préparé par un exercice à la maison, etc.

Dans ce qui suit, nous présentons un exemple possible (parmi d'autres) de progression du cours de géométrie plane, en Sixième et en Cinquième, qui respecte les exigences ci-dessus détaillées. De nombreux professeurs nous ont fait parvenir un travail très élaboré sur ces progressions, et il faut les en remercier. Nous ne pouvons tout reproduire dans cette brochure, mais ce qui est proposé constitue une synthèse des travaux reçus. Il va de soi également **qu'un bon nombre de notions peuvent être introduites avec profit à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique**. Nous n'en avons pas donné d'exemple pour insister sur l'enchaînement didactique du cours.

B – UN EXEMPLE DE PROGRESSION EN SIXIÈME

Dans la présentation qui suit, seulement les quatre premiers chapitres de cette progression sont rédigés en détail ; ce sont les plus délicats et ils sont exemplaires de la démarche voulue. Si l'exposé peut sembler long et un peu aride ; c'est qu'il est destiné au professeur, qui saura alléger certains énoncés, les élaguer ou les omettre au besoin, et <u>les illustrer dans chaque cas</u>. Il en va de même des démonstrations proposées.

Chapitre 1 – Quelques objets de la Géométrie plane

I – Eléments de base et notations usuelles

1. <u>Point, droite</u>

   Un point *A* est représenté par la pointe du crayon. C'est un objet mathématique « sans épaisseur ».
   Si deux points *A* et *B* sont les mêmes, on note : $A = B$, s'ils sont différents (ou distincts), on note $A \neq B$.

   Lorsqu'on trace tous les points en déplaçant le crayon d'un trait continu le long d'une règle, on obtient une droite *D*. Une droite est donc constituée d'une infinité de points.
   On note cette droite *D*, ou parfois $(x'x)$ si l'on désigne ses deux « branches infinies ». (Dessin.)
   Lorsqu'un point *A* appartient à une droite *D*, on note : $A \in D$.
   Lorsqu'un point *A* n'appartient pas à une droite *D*, on note : $A \notin D$.

   <u>Propriété admise</u> : par deux points distincts *A* et *B*, il passe une et une seule droite.
   Cette droite est notée (*AB*) ou (*BA*).

   <u>Définition</u> : lorsque trois points (ou davantage) sont tous distincts et appartiennent à une même droite, on dit qu'ils sont <u>alignés</u>.

2. <u>Demi-droite, segment, longueur d'un segment</u>

   <u>Définition</u> : Soit *A* est un point d'une droite $D = (x'x)$. Tous les points de *D* situés d'un même côté de *A* forment une <u>demi-droite</u> d'origine *A*.
   Le point *A* définit ainsi deux demi-droites, notées $[Ax)$ et $[Ax')$.
   Si *B* est un point (distinct de *A*) appartenant à la demi-droite $[Ax)$, cette demi-droite est notée aussi $[AB)$: c'est la demi-droite d'origine *A* passant par *B*.

   <u>Définition</u>. Soient *A* et *B* deux points distincts. Les points de la droite (*AB*) situés « entre *A* et *B* » constituent le <u>segment</u> d'extrémités *A* et *B*. On le note [*AB*] ou [*BA*].
   La <u>distance</u> de *A* à *B* est notée *AB* ; c'est aussi la <u>longueur</u> du segment [*AB*]. Elle est caractérisée par un écartement de compas.

   Ainsi, le compas et la règle permettent de construire un segment qui a la même longueur qu'un segment donné.
   La règle graduée permet de mesurer cette longueur (en cm, en mm).

3. <u>Milieu d'un segment</u>

   <u>Propriété (admise) et définition</u> : il existe un et un seul point d'un segment qui est situé à égale distance de ses extrémités ; on l'appelle le <u>milieu</u> de ce segment.
   Ainsi, « *I* est le milieu de [*AB*] » signifie : « $I \in [AB]$ et $IA = IB$ ».

4. Angle, angles adjacents, angle plat, angle droit, angle aigu, angle obtus .

Remarque : ce paragraphe peut être traité plus tard dans l'année après la symétrie axiale, il inclura alors de manière cohérente toutes les questions d'ordre angulaire associées à la symétrie axiale.

Deux demi-droites [*Ox*) et [*Oy*) qui ont la même origine *O* forment un angle noté $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{yOx}$.

Lorsque les demi-droites sont désignées par [*OA*) et [*OB*), l'angle est noté $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$.

Lorsque deux angles ont une demi-droite en commun, et qu'ils sont « extérieurs l'un à l'autre », on dit qu'ils sont adjacents.

Lorsque *A*, *O*, *B* sont alignés, on dit que l'angle $\widehat{AOB}$ est plat.

Lorsque l'angle $\widehat{AOB}$ coïncide avec le « bord droit » d'une équerre, on dit que l'angle est droit.

On dit que deux angles sont égaux lorsqu'ils sont superposables par découpage et ajustement.
Lorsqu'ils ne s'ajustent pas, celui qui recouvre l'autre est plus grand.

Un angle plus grand qu'un angle droit est obtus, un angle plus petit qu'un angle droit est aigu.

II – Triangles particuliers

1. Vocabulaire et notations

Un triangle de sommets *A*, *B*, *C* est noté *ABC* ; les segments [*AB*], [*BC*], [*CA*] sont ses côtés.

2. Triangle isocèle

Définition : un triangle *ABC* est isocèle en *A* lorsque les deux côtés issus de *A* ont même longueur : $AB = AC$.

3. Triangle équilatéral

Définition : un triangle *ABC* est équilatéral lorsque les trois côtés ont même longueur : $AB = BC = CA$. Un tel triangle est donc à la fois isocèle en *A*, en *B* et en *C*.

4. Triangle rectangle

Définition : un triangle *ABC* est rectangle en *A* lorsque l'angle de sommet *A* est un angle droit.

III – Quelques quadrilatères particuliers

1. Vocabulaire et notations

Un quadrilatère de sommets *A*, *B*, *C*, *D* est noté *ABCD* ; les segments [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*] sont ses côtés. Les segments [*AC*] et [*BD*] sont ses diagonales.

2. Rectangle

Définition : un quadrilatère *ABCD* est un rectangle lorsque ses quatre angles sont droits.

3. Losange

Définition : un quadrilatère *ABCD* est un losange lorsque ses quatre côtés ont même longueur.

4. Carré

Définition : un quadrilatère est un carré lorsque ses quatre côtés ont même longueur et ses quatre angles sont droits.

Propriété : un carré est à la fois un rectangle et un losange.

IV - Cercle

1. Construction et définition d'un cercle

   Lorsqu'on place la pointe d'un compas sur un point *O* et qu'on bloque l'écartement, la mine dessine un cercle sur la feuille.
   Ainsi, un cercle est formé de tous les points du plan situés à la même distance d'un point fixe *O* appelé son centre. Cette distance commune est le rayon.

   Un cercle peut être défini :
   - soit par son centre et son rayon ;
   - soit à l'aide de son centre et d'un point par lequel il passe.

   Si *C* est le cercle de centre *O*, de rayon 3, « $M \in C$ » signifie que « $OM = 3$ ».
   Plus généralement, si *C* est le cercle de centre *O* et de rayon *r*, l'écriture « $M \in C$ » signifie que « $OM = r$ ».

2. Vocabulaire

   Soit *C* le cercle de centre *O* et de rayon *r*, où *r* est un nombre donné.
   Si *A* est un point de *C* on dit aussi que le segment [*OA*] est **un** rayon du cercle.
   Si *A* et *B* sont deux points de *C*, on dit que le segment [*AB*] est une corde de *C*.
   Une corde passant par le centre est appelée un diamètre de *C*.

Exercices et travaux pratiques (chapitre 1)

- ❖ Exercices sur le vocabulaire et les notations
- ❖ Construction du milieu d'un segment (règle graduée ou pliage)
- ❖ Reports de distances à l'aide du compas, reproduction de triangles à l'identique, construction de triangles connaissant la longueur des côtés (règle graduée)
- ❖ Construction de triangles particuliers
- ❖ Constructions de quadrilatères particuliers
- ❖ Construction de cercles
- ❖ Construction de figures vérifiant certaines propriétés métriques
- ❖ Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre

Chapitre 2 – Droites du plan

I – Droites sécantes, droites parallèles

1. Définitions

   On dit que deux droites sont sécantes si elles se coupent en un seul point.
   Si *A* est le point d'intersection, on dit qu'elles sont sécantes en *A*.

   On dit que deux droites sont parallèles lorsqu'elles ne sont pas sécantes. On note : $D \parallel D'$.
   Ainsi, deux droites identiques (ou confondues) sont parallèles, deux droites qui n'ont aucun point d'intersection sont aussi parallèles.

   Théorème : si deux droites sont parallèles, soit elles sont confondues, soit elles n'ont aucun point d'intersection. Dans ce dernier cas, on dit qu'elles sont strictement parallèles.

Démonstration (faisable, mais pas souhaitable, car trop difficile)
Soit $D \parallel D'$ et $D \neq D'$. Raisonnons par l'absurde : si *D* et *D*' ont des points communs, alors *D* et *D*' ont au moins deux points d'intersection distincts *A* et *B*, puisqu'elles ne sont pas sécantes. Dans ce cas, on aurait $D = (AB)$ et $D' = (AB)$, donc $D = D'$, ce qui est absurde. Donc *D* et *D*' n'ont aucun point d'intersection.

2. Propriété fondamentale due à Euclide (admise)
Soit *D* une droite et *A* un point. Il existe une et une seule droite *D*' passant par *A* et parallèle à *D*.

3. Propriétés du parallélisme
Théorème (de transitivité). Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Démonstration (possible, mais facultative car difficile)
Supposons que $D_1 \parallel D_2$ et $D_2 \parallel D_3$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que D_1 et D_3 sont sécantes en *A*. Alors D_1 et D_3 sont forcément distinctes. D'autre part D_1 et D_3 sont deux parallèles à D_2 passant par *A* ; comme la propriété d'Euclide impose l'unicité, il en résulte que $D_1 = D_3$, ce qui est contradictoire.
Il en résulte que D_1 et D_3 sont parallèles.

II – Droites perpendiculaires

1. Définition
Deux droites *D* et *D*' sont perpendiculaires si elles se coupent « en formant quatre angles droits ». On note : $D \perp D'$.

2. Propriété fondamentale (admise)
Soit *D* une droite et *A* un point. Il existe une et une seule droite *D*' perpendiculaire à *D* et passant par *A*.

3. Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires
Théorème
   a) Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles.
   b) Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
   c) Si deux droites sont perpendiculaires, toute droite parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Démonstration (possible, mais pas souhaitable, car trop difficile)

a) On suppose que $D_1 \perp D$ et $D_2 \perp D$. Raisonnons par l'absurde et supposons que D_1 et D_2 sont sécantes en *A*. Alors D_1 et D_2 sont forcément distinctes. D'autre part, D_1 et D_2 sont deux perpendiculaires à *D* passant par *A* ; comme la propriété fondamentale impose l'unicité, il en résulte que $D_1 = D_2$, ce qui est absurde. Donc D_1 et D_2 sont parallèles.
b) On suppose que $D_1 \parallel D_2$ et que *D* est perpendiculaire à D_1 en *A*. *D* est alors sécante avec D_2 (car sinon *D* serait parallèle aussi à D_1 par transitivité du parallélisme) en *B*. Soit *D'* la perpendiculaire à *D* en *B* ; d'après la propriété a), $D' \parallel D_1$ donc, d'après la propriété d'Euclide, $D' = D_2$. Cela prouve que $D \perp D_2$.
c) On suppose que $D_1 \perp D$ et que $D_1 \parallel D_2$. La propriété b) implique que $D \perp D_2$.

Remarque : la propriété a) permet le tracé de parallèles à l'aide de l'équerre. (Voir TP.)

III – Application à certains quadrilatères

1. Quelques propriétés du rectangle
   Théorème 1 : dans un rectangle, les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

   Démonstration (souhaitable, et même indispensable) : immédiat avec la propriété a).

   Théorème 1 : si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.

   Démonstration (souhaitable, et même indispensable) : facile à l'aide des propriétés a) et b).

2. Trapèze
   Définition : un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles.
   Les côtés [AB] et [DC] d'un trapèze $ABCD$ sont appelés les bases.
   Un trapèze $ABCD$ de bases [AB] et [DC] est dit :
   - isocèle si $AD = BC$;
   - rectangle si l'une des droites (AD) ou (BC) est perpendiculaire aux bases.

Remarque : un rectangle est un trapèze rectangle particulier.

3. Parallélogramme
   Définition : un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés respectivement parallèles.

   Remarque : un rectangle est un parallélogramme particulier et un parallélogramme est un trapèze particulier.

Exercices et travaux pratiques (chapitre 2)

- Exercices sur le vocabulaire et les notations
- Tracé de perpendiculaires, de parallèles à l'aide de l'équerre
- Construction de trapèzes, de parallélogrammes
- Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre

Chapitre 3 – Symétrie axiale

I – Axe de symétrie d'une figure

Activité préparatoire : remettre en scène sur une série de figures données deux compétences du Primaire :
- la reconnaissance d'un éventuel axe de symétrie ;
- la détermination de cet axe par pliage après reproduction sur calque.

1. Définition
   On dit qu'une figure admet un axe de symétrie si deux parties de cette figure se superposent exactement par pliage. Dans ce cas, la droite du pli est un axe de symétrie de la figure.

2. Cas d'un segment : médiatrice
   Propriété admise et définition. Un segment [AB] admet deux axes de symétrie : la droite (AB) elle-même et la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de [AB].
   Cette droite est appelée la médiatrice de [AB].
   On peut la construire soit par pliage, soit à l'aide d'une règle graduée et de l'équerre.

3. Cas d'un angle : bissectrice

Propriété admise et définition. Un angle $\widehat{xOy}$ admet un axe de symétrie qui partage cet angle en deux angles adjacents égaux.
Cette droite est appelée la bissectrice de l'angle. Elle passe par *O*.
On peut la construire par pliage en faisant coïncider les deux demi-droites [*Ox*) et [*Oy*).

4. Cas d'un triangle isocèle

Propriété admise. Dans un triangle *ABC* isocèle en *A*, la médiatrice du segment [*BC*] est un axe de symétrie. Cette droite passe donc par le sommet *A*, et c'est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

5. Cas d'un cercle

Propriété admise : un cercle admet une infinité d'axes de symétrie qui sont toutes les droites passant par son centre.

II – Symétrie axiale

Activité préparatoire : faire construire les symétriques par rapport à une droite Δ de plusieurs figures simples, reproduites au préalable sur un calque que l'on repliera suivant Δ. Parmi ces figures, on placera :
- un segment avec son milieu marqué ;
- un angle ;
- un cercle.

Pour un point donné *M* quelconque et son image *M'*, on remarquera en dépliant que l'axe du pli Δ est la médiatrice du segment [*MM'*].

1. Image d'une figure par symétrie axiale

Définition et propriété. Lorsqu'une figure est reproduite par pliage d'axe Δ, on dit que la figure reproduite est image de la première par la symétrie d'axe Δ. Dans ce cas, Δ est axe de symétrie de l'ensemble des deux figures réunies.

2. Image d'un point

Propriété admise : soit Δ une droite du plan. L'image d'un point *M* par la symétrie d'axe Δ est :
- identique à *M* lorsque $M \in \Delta$;
- le point *M'* tel que Δ est la médiatrice de [*MM'*], lorsque $M \notin \Delta$.

Ainsi les points identiques à leur image sont les seuls points de l'axe Δ.

3. Image de figures usuelles et propriétés de la symétrie axiale

Théorème (admis). Par une symétrie d'axe Δ :

a) L'image d'un segment [*AB*] est un segment [*A'B'*] où *A'* est l'image de *A*, *B'* celle de *B*.
De plus : $AB = A'B'$. (Une symétrie conserve les distances.)
b) L'image d'un angle est un angle égal. (Une symétrie conserve les angles.)
c) L'image d'un cercle de centre *O* est un cercle de centre *O'* (l'image de *O*) et de même rayon.
d) L'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image.

4. Image d'une droite

Théorème (admis). Par une symétrie d'axe Δ :
L'image d'une droite *D* est une autre droite *D'*.

Si $D \perp \Delta$, alors $D' = D$; si $D \parallel \Delta$, alors $D' \parallel D$; si *D* est sécante à Δ en *I*, alors *D* et *D’* se coupent sur l’axe Δ, en *I*.
En particulier, une symétrie conserve l’alignement des points.

III – Premières applications

1. Propriétés du triangle isocèle

Théorème. Dans un triangle *ABC* isocèle en *A*, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux.

Démonstration. La symétrie axiale d’axe la médiatrice Δ de [*BC*] transforme *A* en *A*, *B* en *C* et *C* en *B*, donc l’angle $\widehat{ABC}$ en $\widehat{ACB}$. La conservation des angles permet de conclure.

Conséquence
Les trois angles d’un triangle équilatéral sont égaux.

2. Propriété caractéristique de la médiatrice et construction

Théorème. Soit Δ la médiatrice d’un segment [*BC*]. Alors :
  a) tout point de Δ est équidistant de *B* et de *C* ;
  b) réciproquement, tout point équidistant de *B* et de *C* est situé sur Δ.

Démonstration
a) Soit *M* un point de Δ. La symétrie d’axe Δ transforme *M* en *M* et *B* en *C*, donc (conservation des distances) on a : $MB = MC$.
b) Soit *M* un point du plan tel que $MB = MC$; cela signifie que le triangle *MBC* est isocèle en *M*, donc (propriété admise du I.4.), le point *M* appartient à Δ.

Application : construction de la médiatrice à l’aide du compas.

3. Construction de la bissectrice

Remarque : soit $\widehat{xOy}$ un angle ; on choisit un point *B* sur la demi-droite [*Ox*) et un point *C* sur la demi-droite [*Oy*) tels que $OB = OC$ (*B* et *C* sont construit à l’aide du compas). Le triangle *OBC* est donc isocèle en *O*, ce qui prouve que la bissectrice de l’angle $\widehat{xOy}$ (ou encore $\widehat{BOC}$) est la médiatrice de [*BC*].
On construira donc la bissectrice voulue :
- en plaçant d’abord *B* et *C* à l’aide du compas ;
- en construisant à l’aide du compas un autre point *N* équidistant de *B* et *C*.

La droite cherchée est la droite (*ON*).

Exercices et travaux pratiques (chapitre 3)

- ❖ Reconnaissance et tracé d’un axe de symétrie
- ❖ Tracé de figures symétriques
- ❖ Construction de médiatrices, de bissectrices, à l’aide du compas
- ❖ Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre

Chapitre 4 – Quadrilatères usuels

I – Le losange

1. Définition (rappel)
   Un quadrilatère *ABCD* est un losange s'il a ses quatre côtés de même longueur.

2. Axes de symétrie, propriétés des diagonales
   Théorème 1. Dans un losange *ABCD*, chaque droite diagonale est la médiatrice de l'autre segment diagonal : la droite (*AC*) est la médiatrice de [*BD*] et la droite (*BD*) est la médiatrice de [*AC*]. Ainsi, les droites diagonales sont des axes de symétrie du losange.

   Démonstration. On a : $AB = AD$, ce qui montre que *A* appartient à la médiatrice de [*BD*] et $CB = CD$, ce qui montre que *C* appartient lui aussi à cette médiatrice. Ainsi, la droite (*AC*) est la médiatrice de [*BD*]. On procède de même pour l'autre diagonale.
   La symétrie d'axe (*AC*) transforme *A* en *A*, *B* en *D*, *C* en *C* et *D* en *B*, donc (*AC*) est un axe de symétrie du losange. De même pour (*BD*).

   Théorème 2. Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

   Démonstration. Cela résulte immédiatement du résultat précédent.

3. Angles d'un losange
   Théorème. Dans un losange, les angles opposés sont égaux.

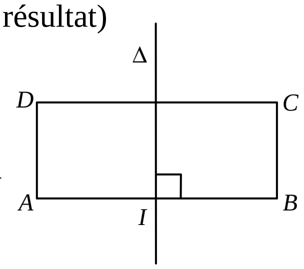
   Démonstration. C'est immédiat (conservation des angles par symétrie).

II – Le rectangle

1. Définition (rappel)
   Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.
   Remarque. Si un quadrilatère a trois angles droits, cela suffit pour conclure que c'est un rectangle (voir chapitre 2).

2. Axes de symétrie d'un rectangle
   Théorème. Dans un rectangle, la médiatrice d'un côté est aussi la médiatrice du côté opposé, et c'est un axe de symétrie. Ainsi un rectangle possède deux axes de symétrie qui sont les médiatrices de deux côtés adjacents.

   Démonstration. (Cette preuve est difficile et il est conseillé d'admettre le résultat)
   Soit *ABCD* un rectangle, *I* le milieu de [*AB*], Δ la médiatrice de [*AB*].
   La symétrie d'axe Δ transforme *A* en *B*, donc la droite (*AD*) en une droite parallèle passant par *B* (car $(AD) \parallel \Delta$, c'est-à-dire en (*BC*).
   Cette même symétrie laisse invariante la droite (*DC*) (car $(DC) \perp \Delta$).
   Ainsi le symétrique de *D* doit appartenir simultanément aux droites (*BC*) et (*CD*). Il en résulte que le symétrique de *D* est *C*.
   Les conclusions en découlent.



3. Propriétés des côtés
   Théorème. Dans un rectangle, les côtés opposés ont la même longueur.
   Démonstration. D'après ce qui précède, les côtés opposés sont images l'un de l'autre par une symétrie axiale, donc (conservation des distances) ils sont de même longueur.

4. Propriétés des diagonales
   Théorème 1. Dans un rectangle, les diagonales ont la même longueur.
   Démonstration. Avec les notations du §2, la symétrie d'axe Δ transforme *A* en *B*, *C* en *D*, donc la diagonale [*AC*] en la diagonale [*BD*]. Il résulte de la conservation des distances : $AC = BD$.

   Théorème 2. Dans un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu.
   Démonstration (faisable, mais peut-être difficile en 6$^{\text{ème}}$; le résultat peut être admis)
   Soit *ABCD* un rectangle ; ses axes de symétrie Δ et Δ' se coupent en *O*. Les diagonales sont images l'une de l'autre par la symétrie d'axe Δ, donc elles se coupent sur Δ. De même, elles doivent se couper sur Δ'. Ainsi les diagonales se coupent en *O*.
   On a, par conservation des distances : $OA = OB = OC = OD$, ce qui montre que *O* est aussi le milieu de chaque diagonale.

III – Le carré

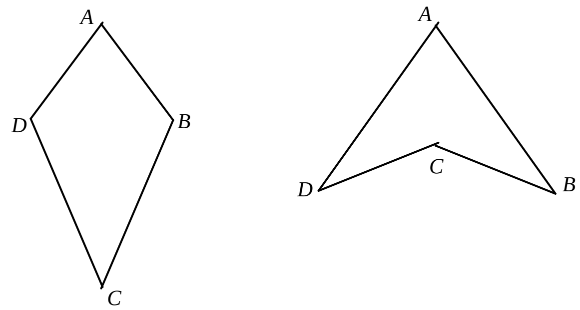
D'après sa définition, un carré est à la fois un rectangle et un losange. Il possède donc toutes les propriétés de ces deux quadrilatères. Résumons-les.

Propriétés

a) Un carré a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.
b) Un carré a quatre axes de symétrie : ses deux diagonales et les médiatrices des paires de côtés opposés.
c) Les diagonales d'un carré ont même longueur, sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

IV – Le cerf-volant

1. Définition
   Un cerf-volant est un quadrilatère ayant ses quatre côtés répartis en deux paires de côtés adjacents de même longueur.
   Il existe deux formes de cerf-volant :



   Pour préciser quels sont les côtés consécutifs de même longueur, on dira que chacune des deux figures ci-contre est un cerf-volant en *A* et *C*.

   Remarque : un losange est un cerf-volant particulier.

2. Propriété
   Théorème. Si *ABCD* est un cerf-volant en *A* et *C*, alors (*AC*) est la médiatrice de [*BD*], et c'est un axe de symétrie du cerf-volant.
   Démonstration. C'est immédiat, d'après la propriété caractéristique de la médiatrice.

Exercices et travaux pratiques (chapitre 4)

- ❖ Construction de losanges connaissant les longueurs des diagonales
- ❖ Construction de rectangles connaissant certains éléments (un côté et la longueur de la diagonale, …)
- ❖ Construction de carrés connaissant certains éléments (la longueur de la diagonale ; un sommet et le centre ; …)
- ❖ Détermination de contre-exemples
- ❖ Jeu du portrait avec des quadrilatères
- ❖ Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre

Chapitre 5 – Mesures : longueurs, masses, durées, angles

Chapitre 6 – Aires : comparaison et mesure

Chapitre 7 – Pavé droit et cube

C – UN EXEMPLE DE PROGRESSION EN CINQUIÈME

La présentation suivante détaille ici encore les quatre premiers chapitres d'une progression possible. Ils sont une illustration de la démarche souhaitée. Il va de soi que la rédaction employée est destinée au professeur, pas à l'élève. Ce qui va être démontré en classe relève du choix pédagogique de chacun, en fonction du niveau de la classe. Il est cependant essentiel de préciser à l'oral et à l'écrit sur le cahier de cours que tel résultat, non démontré est admis. Cette précaution est déterminante pour assurer la pertinence, aux yeux des élèves, des démonstrations qui pourront être faites plus tard, de ces résultats provisoirement admis.

Chapitre 1 – Symétrie centrale

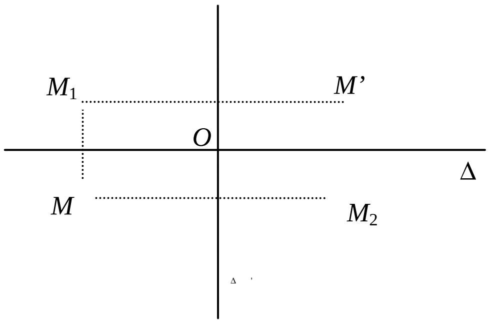
I – Centre de symétrie d'une figure

Activité préparatoire : mettre en scène sur une série de figures certaines compétences graphiques :
- la reconnaissance d'un éventuel centre de symétrie, en faisant effectuer naïvement un demi-tour à la figure ;
- la détermination empirique de ce centre en prenant le milieu d'un couple de points qui semblent être « homologues ».

1. Définition (naïve)
   On dit qu'une figure admet un axe de symétrie si lorsqu'on fait subir un demi-tour à la figure, la figure obtenue peut se superposer à la figure initiale.

2. Remarque
   Dans l'opération précédente de retournement, si *M* est un point quelconque de la figure initiale et *M'* l'image de *M* après retournement et superposition, le milieu *O* de [*MM'*] est le même pour tous les points *M* de la figure de départ.

II – Une nouvelle transformation



1. Une figure à l'étude
   Soit Δ et Δ' deux droites perpendiculaire en *O*, et *M* un point du plan qui n'est situé sur Δ ni sur Δ'. On note M_1 le symétrique de *M* par rapport à Δ, M_2 et *M'* les symétriques respectifs de *M* et M_1 par rapport à Δ'. Comme $(MM_1)\perp\Delta$, $(MM_2)\perp\Delta'$ et $(M_1M')\perp\Delta'$, les angles $\widehat{M_2MM_1}$ et $\widehat{MM_1M'}$ sont droits et $(MM_1)\,||\,\Delta'$. On déduit de ce dernier résultat que $(MM_1)\,||\,\Delta'\,||\,(M_2M')$, car une symétrie axiale transforme une droite parallèle à l'axe en une autre droite parallèle à l'axe. Ainsi le quadrilatère $MM_2M'M_1$ a quatre angles droits , donc c'est un rectangle ayant Δ et Δ' comme axes de symétrie.
   Conclusion : *O* est le milieu de [*MM'*], d'après les propriétés du rectangle dégagées en 6ème.

Remarque. Ce résultat est parfaitement abordable en début de cinquième à condition d'être préparé par un devoir à la maison et par exemple vérifié sur un logiciel de géométrie dynamique. Il montre qu'en composant deux symétries axiales d'axes perpendiculaires, on transforme un point *M* en un point *M'* tel que le point d'intersection *O* des axes est le milieu de [*MM'*], ce qui amène la définition suivante.

2. Définition
Soit *O* un point fixé. Le symétrique par rapport à *O* d'un point *M* du plan est le point *M'* tel que *O* soit le milieu du segment [*MM'*]. On dit aussi que *M'* est l'image de *M* par la symétrie de centre *O*.

Remarques :
a) *O* est le seul point du plan égal à son propre symétrique.
b) D'après le §1, lorsqu'on prend l'image d'une figure par une symétrie d'axe Δ, puis l'image de cette nouvelle figure par la symétrie d'axe $\Delta' \perp \Delta$, cela revient à prendre l'image de la figure initiale par la symétrie de centre le point d'intersection *O* de Δ et Δ'.

3. Propriété fondamentale (admise). L'image d'un point par une symétrie de centre *O* est l'image de ce point par deux symétries axiales successives d'axes perpendiculaires en *O*, l'un des axes pouvant être choisi arbitrairement.

III – Premières propriétés de la symétrie centrale

Théorème. Par une symétrie de centre *O* :
a) L'image d'un segment [*AB*] est un segment [*A'B'*] où *A'* est l'image de *A*, *B'* celle de *B*.
De plus : $AB = A'B'$. (Une symétrie centrale conserve les distances.)
b) L'image d'un angle est un angle égal. (Une symétrie conserve les angles.)
c) L'image d'un cercle de centre *O* est un cercle de centre *O'* (l'image de *O*) et de même rayon.
d) L'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image.

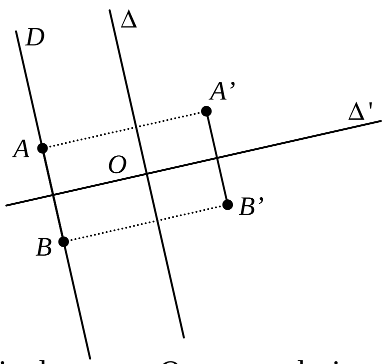
Démonstration.
Tout résulte des propriétés analogues de la symétrie axiale et de la propriété fondamentale.

IV – Image d'une droite

Théorème. Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle.
En particulier, une symétrie conserve l'alignement des points.

Démonstration. (Cette preuve est difficile, et le résultat peut être raisonnablement admis, et seulement conjecturé expérimentalement.)

Soit *D* une droite et *O* un point. Si *O* appartient à *D*, il est clair que l'image de *D* par la symétrie de centre *O* est *D*. Sinon on considère la droite Δ, la parallèle à *D* passant par *O* et Δ' la perpendiculaire à *D* passant par *O*.



Soit encore *A* et *B* deux points de *D* symétriques par rapport à Δ'. Si *A'* et *B'* sont les symétriques respectifs de *A* et *B* par rapport à Δ, il est clair d'après la propriété fondamentale (§ II.3.) que *B'* et *A'* sont les symétriques respectifs de *A* et *B* par rapport à *O*.

D'autre part $(A'B') \parallel (AB)$. Comme l'image de *D* par cette symétrie de centre *O* est une droite, c'est donc une droite parallèle.

Exercices et travaux pratiques (chapitre 1)

- ❖ Reconnaissance et détermination d'un centre de symétrie.
- ❖ Construction de figures symétriques par rapport à un point.
- ❖ Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre.

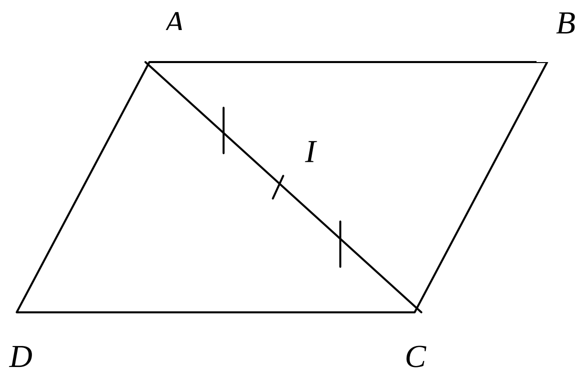
Chapitre 2 – Parallélogrammes

I – Généralités

1. Définition (rappel)
   Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés deux à deux parallèles.

2. Centre de symétrie
   Théorème. Un parallélogramme admet un centre de symétrie : le point d'intersection des diagonales.

   Démonstration.



Soit *ABCD* un parallélogramme et *I* le milieu de la diagonale [*AC*].
Le symétrique du point *A* par rapport au point *I* est le point *C*. Le symétrique de la droite (*AB*) par rapport au point *I* est la droite passant par *C* et parallèle à (*AB*) : c'est donc la droite (*CD*).
On montre de même que le symétrique par rapport au point *I* de la droite (*BC*) est (*AD*) .
Ainsi, le symétrique du point *B* est le point *D*.
ABCD est donc son propre symétrique ce qui signifie que *I* est centre de symétrie du parallélogramme *ABCD*.

II – Propriétés du parallélogramme

Tous les résultats de ce paragraphe résultent immédiatement du I.2.

1. Propriétés relatives aux diagonales
   Théorème. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Ce point est appelé le centre du parallélogramme.

2. Propriétés relatives aux côtés
   Théorème. Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.

3. Propriétés des angles
   Théorème. Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux.

III – Reconnaissance d'un parallélogramme

1. Par les diagonales
   Théorème. Si un quadrilatère *ABCD* a ses diagonales qui se coupent en leur milieu *I*, alors c'est un parallélogramme.

   Démonstration. La symétrie de centre I transforme *A* en *C*, *B* en *D* et *D* en *B*, donc $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$. Cela suffit.

2. Par les côtés opposés de même longueur

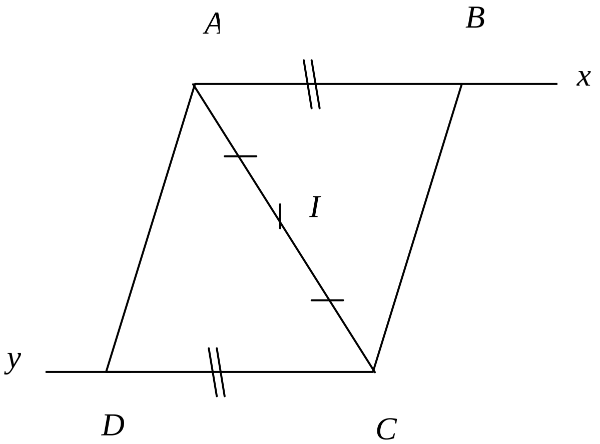
Théorème. Si un quadrilatère (non croisé) a ses côtés opposés de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme**.**

Démonstration (difficile ; le résultat peut être admis)
Soit *ABCD* un quadrilatère dont les côtés opposés ont la même longueur.
On considère la symétrie centrale de centre *I*, *I* désignant le milieu de la diagonale [*AC*].
Déterminons *B'* le symétrique du point *B*.
Les symétriques respectifs des segments [*AB*] et [*BC*] sont les segments [*CB'*] et [*B'A*]. On a de plus, *AB* = *CB'* et *BC* = *B'A*. Ainsi *B'* est nécessairement l'un des points d'intersection du cercle (C_1) de centre *C*, de rayon *AB* et du cercle (C_2) de centre *A* de rayon *BC*. Pour satisfaire ces conditions, le point *D* convient et lui seul.
Ainsi, le symétrique du point *B* est le point *D*.
ABCD est donc un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu, c'est-à-dire un parallélogramme.

Remarque. Ce résultat permet et justifie la construction de parallèles à l'aide du compas.

3. Par deux côtés opposés parallèles et de même longueur

Théorème. Si un quadrilatère (non croisé) a une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.



Démonstration. (difficile ; le résultat peut être admis)
Soit *ABCD* un quadrilatère dont les cotés [*AB*] et [*CD*] sont parallèles et de même longueur.
On construit de part et d'autre de la droite (*AC*), deux demi-droites parallèles [*Ax*) et [*Cy*).
On considère la symétrie de centre *I*, le milieu de [*AC*].
Déterminons *B'* le symétrique du point *B*.
B appartient à la demi-droite[*Ax*) donc *B'* appartient la demi-droite [*Cy*), symétrique de la demi-droite[*Ax*).
De plus, *B'* est à la distance *AB* de *C*.
Ainsi, *B'* = *D*.
ABCD est donc un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu, c'est à dire un parallélogramme.

Exercices et travaux pratiques (chapitre 2)

- Construction de parallélogrammes connaissant certains éléments.
- Construction de parallèles à une droite donnée à l'aide du compas.
- Calcul de grandeurs utilisant les propriétés du parallélogramme.
- Problèmes de parallélisme utilisant les propriétés du parallélogramme.
- Problèmes de milieu.
- Exemples et contre-exemples concernant les propriétés d'un quadrilatère.
- Reconnaissance de parallélogrammes.
- Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre.

Chapitre 3 – Quadrilatères particuliers

I – Le rectangle

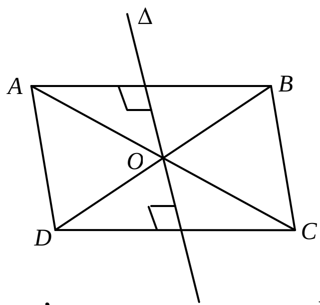
1. Rappel des propriétés connues
   Propriétés
   a) Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.
   b) Un rectangle possède deux axes de symétrie, qui sont les médiatrices des paires de côtés opposés.
   c) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.
   d) Les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur. Ainsi un rectangle est un parallélogramme particulier. On en déduit en particulier (mais ce résultat a pu être dégagé en 6ème à l'aide de la symétrie axiale) que les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

2. Reconnaissance d'un rectangle
   Théorème 1. Soit *ABCD* un parallélogramme. Si de plus *ABCD* a un angle droit, c'est un rectangle.

   Démonstration. Puisque les côtés opposés sont deux à deux parallèles, on en déduit facilement que *ABCD* a quatre angles droits.

   Théorème 2. Soit *ABCD* un parallélogramme. Si de plus les diagonales [*AC*] et [*BD*] ont la même longueur, alors *ABCD* est un rectangle.

   Démonstration. (Difficile. Il est préférable d'admettre le résultat)
   Soit *O* le point de concours des diagonales. D'après les hypothèses, on a : $OA = OB = OC = OD$, ce qui montre que *O* appartient à la fois à la médiatrice Δ de [*AB*] et à celle Δ' de [*BD*]. Or $(AB) \parallel (CD)$, donc $\Delta \parallel \Delta'$; comme *O* appartient à Δ et à Δ', il en résulte que $\Delta = \Delta'$. Il est clair alors que la symétrie d'axe Δ transforme la droite (*AD*) en (*BC*), qui lui est parallèle. On en déduit que (*AD*) est parallèle à l'axe Δ de la symétrie, et donc que l'angle $\widehat{BAD}$ est droit. Le parallélogramme *ABCD* ayant un angle droit, c'est un rectangle.



   Remarque. Une démonstration plus simple, qui s'appuie sur des propriétés angulaires, est aussi envisageable :
   - soit si l'on a montré au préalable que deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires ;
   - soit en utilisant les deux triangles isocèles *OAD* et *OAB* : la somme des angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OAD}$ est égale à 90°.

II – Le losange

1. Rappel des propriétés connues
   Propriétés
   a) Un losange a deux axes de symétrie, qui sont ses diagonales.
   b) Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu. Ainsi, un losange est un parallélogramme particulier et il a un centre de symétrie.
   c) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.
   d) Les côtés opposés d'un losange sont parallèles.
2. Reconnaissance d'un losange
   Théorème 1. Soit *ABCD* un parallélogramme. Si *ABCD* a aussi deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange.

Démonstration. On a $AB = DC$ et $AD = BC$ (propriété du parallélogramme). Si de plus $AB = AD$ (par exemple), alors *ABCD* a ses quatre côtés de même longueur.

Théorème 2. Soit *ABCD* un parallélogramme. Si *ABCD* a aussi ses diagonales perpendiculaires, c'est un losange.

Démonstration. D'après les hypothèses, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu *O*, donc chaque diagonale est la médiatrice de l'autre. On en déduit (propriété caractéristique de la médiatrice) que $AB = BC = CD = DA$.

III – Le carré

1. Rappel des propriétés connues

   Propriétés. Ce sont celles du rectangle et du losange :
   a) Un carré a quatre axes de symétrie (les diagonales et les médiatrices des paires de côtés opposés) et un centre de symétrie.
   b) Il a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits.
   c) Il a deux diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu.

2. Reconnaissance d'un carré

   Théorème. Soit *ABCD* un parallélogramme.
   a) Si de plus *ABCD* a deux côtés consécutifs de même longueur et un angle droit, alors c'est un carré.
   b) Si de plus *ABCD* a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.

   Démonstration. Cela résulte immédiatement de I et II.

Remarque. On peut étudier d'autres quadrilatères tels que : trapèze, trapèze isocèle, cerf-volant, …, et en dégager des propriétés et des « moyens de reconnaissance ». Cependant il est raisonnable de ne pas surcharger le cours et de mener certaines études dans un autre cadre (travaux pratiques, devoir à la maison).

Exercices et travaux pratiques (chapitre 3)

- Construction de rectangles, rectangles, carrés connaissant certains éléments.
- Calcul de grandeurs utilisant les propriétés des quadrilatères usuels.
- Problèmes de parallélisme utilisant les propriétés des quadrilatères usuels.
- Problèmes d'orthogonalité utilisant les propriétés des quadrilatères usuels.
- Exemples et contre-exemples concernant les propriétés des quadrilatères particuliers.
- Etude du trapèze, du trapèze isocèle.
- Etude du cerf-volant.
- Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre.

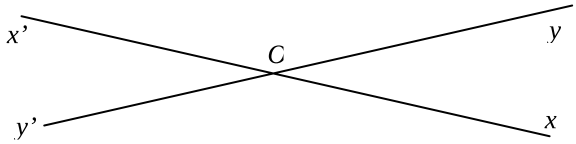
Chapitre 4 – Angles

I – Vocabulaire

1. Angles opposés par le sommet

Définition. Deux angles sont opposés par le sommet quand :

- ils ont le même sommet ;
- ils sont symétriques par rapport à ce sommet commun.



$\widehat{x'Oy'}$ et $\widehat{xOy}$ sont opposés par le sommet

Remarque : de tels angles sont obtenus dès que deux droites sont sécantes.

2. Angles complémentaires, supplémentaires

Définition

Deux angles sont complémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 90 °.

Deux angles sont supplémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 180 °.

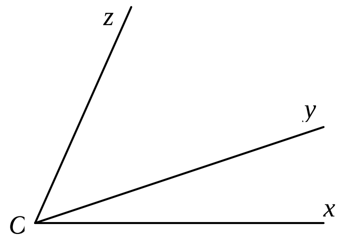
3. Angles adjacents

Définition. Deux angles sont adjacents quand :

- ils ont le même sommet,
- ils ont une demi-droite en commun ;
- ils sont situés de part et d'autre de cette demi-droite.

Résultat admis.

Avec les notations précédentes : $\widehat{xOz} = \widehat{xOy} + \widehat{yOz}$.



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents

4. Angles formés par deux droites coupées par une même sécante

Définitions

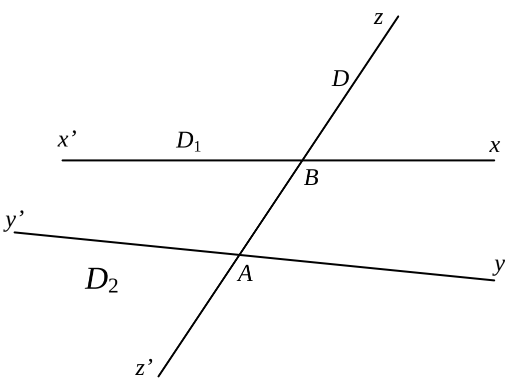
Soient deux droites (D_1) et (D_2) coupées respectivement en A et B par une sécante (D).

a) Un angle de sommet A et un angle de sommet B sont alternes internes quand :
   - ils sont situés de part et d'autre de la sécante,
   - ils sont situés entre les droites (D_1) et (D_2).

b) Un angle de sommet A et un angle de sommet B sont alternes externes quand :
   - ils sont situés de part et d'autre de la sécante,
   - ils ne sont pas situés entre les droites (D_1) et (D_2).

c) Un angle de sommet A et un angle de sommet B sont correspondants quand :
   - ils sont du même côté de la sécante,
   - l'un est entre les droites (D_1) et (D_2), l'autre ne l'est pas.

Illustration :



$\widehat{yAz}$ et $\widehat{x'Bz'}$ sont alternes internes

$\widehat{xBz'}$ et $\widehat{y'Az}$ sont alternes internes

$\widehat{yAz'}$ et $\widehat{x'Bz}$ sont alternes externes

$\widehat{xBz}$ et $\widehat{y'Az'}$ sont alternes externes

$\widehat{yAz'}$ et $\widehat{xBz'}$ sont correspondants

$\widehat{xBz}$ et $\widehat{yAz}$ sont correspondants

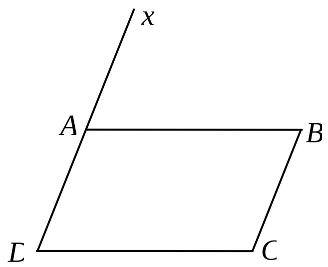
II – Propriétés des angles

1. Propriété des angles opposés par le sommet
   Théorème. Deux angles opposés par le sommet sont égaux.
   Démonstration. C'est immédiat puisqu'une symétrie centrale conserve les angles.

2. Propriété des angles formés par deux parallèles coupées par une même sécante
   Théorème. Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors :
   - les angles alternes internes d'une même paire sont égaux ;
   - les angles alternes externes d'une même paire sont égaux ;
   - les angles correspondants d'une même paire sont égaux.

Démonstration (essentielle). On utilise les notations de la figure précédente, et on note I le milieu de $[AB]$. La symétrie de centre I transforme A en B, et une demi-droite d'origine A en une demi-droite parallèle d'origine B. Cela permet de prouver que les angles alternes internes d'une même paire sont transformés l'un en l'autre, et il en va de même pour les angles alternes externes. Par ailleurs, pour un angle d'une paire d'angles correspondants, l'angle qui lui est opposé par le sommet est alterne interne (ou alterne externe) avec son « compagnon ». Cela permet de conclure : les angles correspondants sont égaux.

Conséquence (propriété angulaire du parallélogramme)
Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.

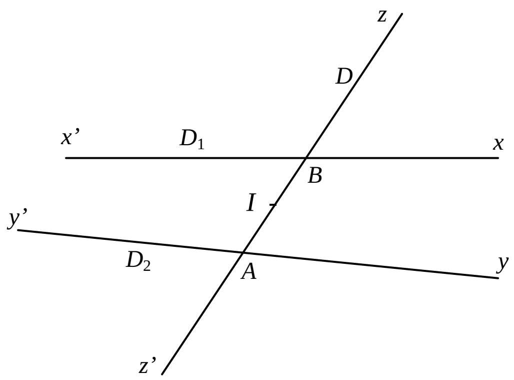


Démonstration. Soit $ABCD$ un parallélogramme.
On prolonge le segment $[AD]$ du côté de A en une demi-droite $[Ax)$ ne contenant pas
le point D.
Les angles $\widehat{CDA}$ et $\widehat{BAx}$ sont correspondants, donc égaux. Les angles $\widehat{BAx}$ et $\widehat{BAD}$ sont supplémentaires.
D'où le résultat.

3. Deux propriétés réciproques

Théorème.

a) Si deux droites sont coupées par une sécante en formant une paire d'angles alternes internes égaux, alors ces droites sont parallèles.
b) Si deux droites sont coupées par une sécante en formant une paire d'angles correspondants égaux, alors ces droites sont parallèles.



Démonstration (essentielle). Les notations sont celles de la figure et I est le milieu de $[AB]$.

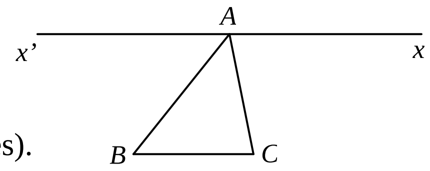
a) Supposons que $\widehat{x'Bz'} = \widehat{yAz}$. Par la symétrie de centre I, l'image de B est A et l'image de $[Bz')$ est $[Az)$; il en résulte que l'image de $\widehat{x'Bz'}$ est un angle de sommet A , dont un côté est [Az), et ayant même mesure que $\widehat{x'Bz'}$. C'est donc l'angle $\widehat{yAz}$. Il en résulte que l'image de $[Bx')$ est $[Ay)$, et donc : $D_1 \parallel D_2$.

b) Supposons que $\widehat{xBz} = \widehat{yAz}$. Comme les angles $\widehat{xBz}$ et $\widehat{x'Bz'}$ sont opposés par le sommet, ils sont égaux, donc $\widehat{x'Bz'} = \widehat{yAz}$ et nous sommes ramenés au cas précédent.

III – Angles d'un triangle

1. Somme des angles

Théorème. Dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°.



Démonstration. (Essentielle à mettre en rapport avec l'approche faite précédemment en termes de découpages.)

$\widehat{CBA}+\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=\widehat{x'AB}+\widehat{BAC}+\widehat{CAx}$ (angles alternes internes).

On en déduit : $\widehat{CBA}+\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=\widehat{x'Ax}=180°$.

2. Applications aux triangles particuliers

Théorème.

a) Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.
b) Dans un triangle isocèle et rectangle, les angles aigus mesurent 45°.
c) Dans un triangle équilatéral, les trois angles mesures 60°.

Démonstration. C'est immédiat.

Exercices et travaux pratiques (chapitre 4)

- Travail sur le vocabulaire introduit.
- Calcul et comparaison d'angles.
- Problèmes de parallélisme utilisant les angles.
- Problèmes d'alignement utilisant les angles.
- Problèmes d'orthogonalité utilisant les angles.
- Somme des angles d'un quadrilatère convexe, d'un polygone convexe.
- Construction de triangles connaissant certains éléments angulaires.
- Petits problèmes de raisonnement utilisant les propriétés du chapitre.

Chapitre 5 – Compléments sur les triangles – Droites particulières

Chapitre 6 – Mesures : longueurs, masses, durées,

Chapitre 7 – Aires : comparaison et mesure

Chapitre 8 – Prismes droits et cylindres de révolution

QUATRIÈME PARTIE :
L'aspect multiforme du raisonnement

I – Introduction

L'activité mathématique au collège et au lycée consiste essentiellement pour l'élève à comprendre et assimiler certaines notions et méthodes en vue de résoudre des problèmes. Pour y parvenir, la démarche mathématique utilise certaines formes du raisonnement, qu'il s'agit d'enseigner progressivement. Il faut insister sur un facteur essentiel à prendre en compte dans cet enseignement : le raisonnement revêt des aspects multiformes ; il ne se limite pas à la preuve, la preuve au raisonnement déductif, le raisonnement déductif à la démonstration, ni la démonstration à sa seule mise en forme. Oublier cet emboîtement en « poupées russes » conduirait à une sclérose de l'enseignement des mathématiques, avec le risque de le rendre réducteur, sélectif et vide de sens. Nous allons décliner dans cette partie quelques pistes pour développer différentes facettes du raisonnement en mathématiques, dès les classes de Sixième et de Cinquième.

II – Réfuter, chercher un contre-exemple

Il s'agit d'entraîner les élèves à aiguiser leur sens critique face à une affirmation donnée, et à savoir la réfuter lorsqu'elle est fausse. Lorsque l'affirmation envisagée est introduite par un quantificateur universel (même s'il est implicite), la meilleure façon de la mettre en défaut consiste à exhiber un contre-exemple. Les exercices qui suivent, communément appelés des « Vrai/Faux », proposent des exemples d'affirmations à confirmer ou infirmer ; elles sont classées par rubriques. Pour chaque exercice, la consigne est :

« Les affirmations suivantes ne sont pas toutes justes. Débusquer les affirmations fausses et donner un contre-exemple. »

A – En classe de Sixième

1) Arithmétique
   a) Si un nombre est divisible par 6, alors il est divisible par 3.
   b) Si un nombre est divisible par 3, alors il est divisible par 6.
   c) Si un nombre se termine par 3, alors il est divisible par 3.
   d) Si un nombre se termine par 5, alors il est divisible par 5.
   e) Si un nombre est divisible par 5, alors il se termine par 5.
   f) Si un nombre est divisible par 7, alors il est impair.
   g) L'égalité $173 = 9 \times 18 + 11$ est la division euclidienne de 173 par 18.
   h) Si, pour une multiplication, la preuve par 9 tombe juste, alors l'opération est juste.
   i) Le produit de deux nombres impairs est impair.
   j) La différence de deux nombres impairs est impaire.
   k) Un nombre qui est à la fois multiple de 2 et de 3 est multiple de 6.
   l) Un nombre qui est à la fois multiple de 4 et de 6 est multiple de 24.
   m) La somme de deux diviseurs d'un entier est un diviseur de cet entier.
   n) La somme de deux multiples d'un entier est un multiple de cet entier.
   o) Le produit de deux entiers de parités différentes est un nombre pair.

2) Nombres décimaux, opérations, comparaison
   a) Multiplier un nombre par un décimal augmente ce nombre.
   b) Le centième d'une dizaine, c'est un dixième.
   c) Un nombre entier est un décimal et c'est aussi une fraction.
   d) Il y a un seul nombre décimal strictement compris entre 6,4 et 6,5.
   e) Si deux nombres décimaux ne sont pas entiers, leur somme n'est pas un entier.

f) Sophie et Jean jouent à un jeu. Ils doivent donner chacun à leur tour un nombre strictement plus petit que 1 mais plus grand que celui qui vient d'être dit. Sophie peut gagner à coup sûr en disant un nombre sur lequel Pierre ne pourra pas renchérir.
g) Le produit de deux nombres décimaux est supérieur ou égal à ces deux nombres.
h) Multiplier un nombre par 0,2, puis par 0,3, revient à le multiplier par 0,6.
i) Diviser par 0,5, cela revient à multiplier par 2.
j) L'arrondi au dixième et l'arrondi au centième d'un nombre ne sont jamais égaux.

3) <u>Fractions</u>
a) Tous les nombres décimaux ont une écriture fractionnaire.
b) Cinq minutes, c'est $\frac{1}{288}$ d'un jour.
c) $3\times\frac{1}{7}$, c'est aussi $3:7$.
d) Pour comparer un nombre à $\frac{2}{3}$, il suffit de le comparer à 0,66.

4) <u>Proportionnalité, pourcentages</u>
a) 25% d'un nombre, c'est $\frac{1}{4}$ de ce nombre.
b) Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté.
c) Pour un pavé droit de hauteur 7,2 cm et dont la base est carrée, le volume est proportionnel au côté de la base carrée.
d) Pour adapter une recette de 3 à 4 personnes, on multiplie les quantités par $\frac{3}{4}$.
e) Calculer 60% d'un nombre, c'est le diviser par 0,6.

5) <u>Eléments de géométrie plane</u>
a) Si $AM = MB$, alors le point M est le milieu du segment $[AB]$.
b) Si les points A, B, C sont alignés et si les points A, D, E sont alignés, alors les points A, B, C, D, E sont tous situés sur une même droite.
c) Si les points A, B, C sont alignés, alors $AB + BC = AC$.
d) Dans le plan, une droite peut être perpendiculaire à deux droites sécantes.

6) <u>Symétrie axiale</u>
a) Une figure peut avoir douze axes de symétrie.
b) La figure formée par deux cercles admet un axe de symétrie.
c) La figure formée par un cercle et une droite admet un axe de symétrie.
d) Si deux points sont situés à égale distance d'une droite (d), alors ils sont symétriques par rapport à (d).
e) Si une droite est axe de symétrie d'un segment, alors c'est la médiatrice de ce segment.
f) Si deux droites sécantes sont images l'une de l'autre par une symétrie axiale, alors leur point d'intersection est situé sur l'axe de la symétrie.

7) <u>Angles, bissectrice</u>
a) Dans un triangle isocèle, la bissectrice d'un angle est la médiatrice du côté opposé.
b) Si dans un triangle une bissectrice est médiatrice d'un côté, alors ce triangle est isocèle.
c) La bissectrice d'un angle $\widehat{AOB}$ passe par le milieu du segment $[AB]$.
d) Aucun des angles d'un losange ne peut être un angle droit.
e) Dans un triangle isocèle, une bissectrice est un axe de symétrie du triangle.

8) Figures : triangles, quadrilatères, cercles
   a) Un quadrilatère ayant deux diagonales de même longueur est un rectangle.
   b) Un carré est un losange.
   c) Un parallélogramme qui possède un axe de symétrie est un rectangle.
   d) Un parallélogramme qui possède deux axes de symétrie est un rectangle.
   e) Un quadrilatère qui a deux diagonales perpendiculaires est un cerf-volant.
   f) Un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle.
   g) Un quadrilatère ayant trois côtés de même longueur est un losange.
   h) Un quadrilatère qui a deux angles droits est un trapèze rectangle.
   i) Un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange.
   j) Si un triangle a deux axes de symétrie, alors il est équilatéral.

9) Mesures, périmètres, aires, volumes
   a) Un rectangle de périmètre 26 cm a une aire supérieure à celle d'un rectangle de périmètre 16 cm.
   b) Deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire.
   c) Deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre.
   d) Si les dimensions d'un rectangle augmentent de 10%, son périmètre augmente de 10% et son aire de 21%.
   e) 1,50 h, c'est 1h 50 min.
   f) Sur une feuille A4, on ne peut pas tracer un polygone de 2m de périmètre.
   g) Deux losanges de même aire ont les mêmes dimensions.

10) Géométrie dans l'espace
   a) Tout segment qui relie deux sommets d'un cube est une arête.
   b) Un pavé droit ayant une face carrée est un cube.
   c) Un pavé droit ayant trois faces carrées est un cube.
   d) Dans l'espace, deux droites qui ne sont pas sécantes sont parallèles.
   e) Trois sommets d'un cube forment soit un triangle rectangle, soit un triangle équilatéral.
   f) En perspective cavalière, un triangle rectangle est représenté par un triangle rectangle.

B – En classe de Cinquième

1. Nombres relatifs
   a) La somme de deux nombres relatifs de signes contraires est négative.
   b) Un nombre relatif est supérieur à son opposé.
   c) Si deux nombres relatifs ont pour somme 2006, alors ils sont tous les deux positifs.
   d) La somme de 15 et d'un nombre relatif est toujours positive.

2. Fractions
   a) Pour comparer deux fractions, il suffit de comparer leurs numérateurs.
   b) $\frac{a}{b}\times k=\frac{a\times k}{b\times k}$.
   c) Il n'y a pas de fraction strictement comprise entre $\frac{13}{9}$ et $\frac{14}{9}$.
   d) Une fraction de la forme $\frac{n}{n+1}$ (où n est un entier naturel) est toujours inférieure à 0,99.
   e) Soit a, b, c trois entiers naturels strictement positifs ; alors $\frac{a+c}{b+c}=\frac{a}{b}$.
   f) Soit a, b, c trois entiers naturels strictement positifs ; alors $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

3. Calcul algébrique, équations
   a) Si $x + y = z$, alors $2(x + y) = 2z$.
   b) Tout nombre pair s'écrit sous la forme $2n$, où n est un entier.
   c) Tout nombre impair s'écrit sous la forme $2n+1$, où n est un entier.
   d) L'égalité $4x + 3 = 3x + 4$ est vraie pour tout nombre x.
   e) L'égalité $3x = 4y + 5$ n'est vraie que pour $x = 7$ et $y = 4$.
   f) Toute équation du premier degré à une inconnue admet une solution décimale.
   g) 0 est solution de l'équation $7x = 7$.
   h) 0 est solution de l'équation $3x = 5x$.
   i) L'égalité $3x + 4y = 7$ n'est vraie que lorsque x vaut $\frac{5}{3}$ et y vaut 0,5

4. Proportionnalité, pourcentages
   a) Augmenter un nombre de 100%, c'est doubler ce nombre.
   b) Une baisse de 40% suivie d'une autre baisse de 20%, cela revient à une baisse globale de 60%.
   c) Si un article subit deux baisses successives de 50%, alors il devient gratuit.
   d) Si on augmente un prix de 5% puis on le diminue de 5%, on revient au prix de départ.

5. Symétrie centrale
   a) Si A est le symétrique de M par rapport à B, alors M est le milieu du segment $[AB]$.
   b) Un triangle équilatéral a un centre de symétrie.
   c) Une figure qui a deux axes de symétrie a un centre de symétrie.
   d) Un quadrilatère qui a un centre de symétrie est un parallélogramme.
   e) Si une figure possède un centre de symétrie, alors celui-ci est unique.
   f) Dans une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle.

6. Parallélogrammes, autres quadrilatères
   a) Les diagonales d'un parallélogramme sont des axes de symétrie.
   b) Un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles est un parallélogramme.
   c) Un parallélogramme qui a ses angles opposés supplémentaires est un rectangle.
   d) Un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires est un carré.
   e) Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
   f) Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.

7. Triangles, droites remarquables
   a) L'orthocentre d'un triangle est toujours à l'intérieur de ce triangle.
   b) Si H est l'orthocentre du triangle ABC, alors C est l'orthocentre du triangle ABH.
   c) Le centre du cercle circonscrit à un triangle est situé à l'intérieur de ce triangle.

8. Angles
   a) Un triangle qui a deux angles de 60° est équilatéral.
   b) Les deux angles aigus d'un triangle rectangle mesurent chacun 45°.
   c) Un triangle isocèle n'a pas d'angle droit.
   d) Dans un parallélogramme, les bissectrices issues de deux sommets voisins sont perpendiculaires.
   e) Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.
   f) Tout triangle isocèle dont un angle mesure 60° est équilatéral.
   g) Deux angles alternes-internes sont égaux.
   h) Deux angles adjacents sont complémentaires.

9. Mesures : périmètres, aires, volumes
   a) Si on double le rayon d'un disque, son aire double aussi.
   b) Si on multiplie par 3 les dimensions d'un rectangle, alors son aire est multipliée par 9.

c) Un parallélogramme dont les côtés mesurent 5 cm et 6 cm a une aire de 60 cm^2.
d) Si on double les longueurs des arêtes d'un prisme droit, alors on multiplie son aire latérale par 4 et son volume par 8.
e) Deux parallélogrammes qui ont la même aire sont superposables.

10. <u>Prismes et cylindres</u>
a) Un prisme droit à base carrée est un cube.
b) Tous les prismes droits ont au maximum 18 arêtes.
c) Si on double la hauteur d'un cylindre, on double son volume.
d) Si on double le rayon d'un cylindre, on double son volume.
e) Dans le patron d'un cylindre, la surface latérale est un rectangle.
f) Deux cylindres qui ont la même surface latérale ont le même volume.
g) Deux cylindres qui ont le même volume ont le même patron.

III – Analyser une situation

Il s'agit de développer la rigueur dans la prise en compte de données et dans leur description. En géométrie, cela peut être travaillé en repérant le codage dans une figure, en suivant un programme de construction ou mieux : en élaborant la rédaction de consignes permettant de reproduire une figure relativement complexe à l'identique. Dans le domaine numérique, cette compétence peut être développée par un travail sur les priorités de calcul.

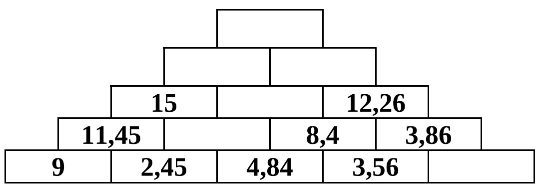
<u>Exemple 1</u> : <u>repérer les priorités de calcul</u>
Chaque question propose trois réponses possibles, dont une seule est correcte. Laquelle ?

1. L'expression $3a+5b$ est :
a) le produit de deux sommes ; b) la somme de deux produits ; c) le triple d'une somme.
2. L'expression $\dfrac{a+b}{2a+7b}$ est :
a) la somme de deux quotients ; b) l'inverse d'une somme ; c) le quotient de deux sommes.
3. L'expression $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ est :
a) la somme de deux inverses ;
b) l'inverse d'une somme ;
c) le quotient de deux sommes.

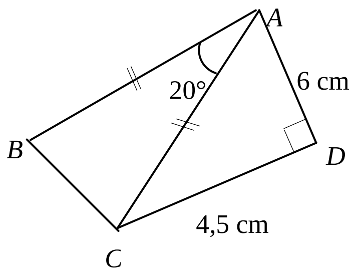
<u>Exemple 2</u> : <u>repérer des opérations</u>

Observer la pyramide ci-contre.

Trouver une règle permettant de la remplir et compléter.



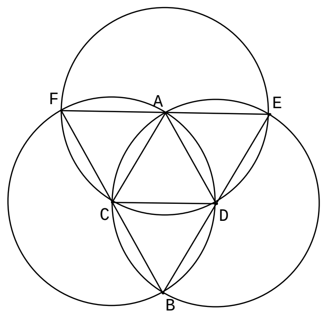
<u>Exemple 3</u> : <u>lire un codage</u>
La figure ci-contre est inexacte.
Préciser les données fournies par le codage, et réaliser la figure juste.



Exemple 4 : suivre un programme de construction
Le programme suivant permet la construction d'une étoile régulière à cinq branches.

Tracer un cercle (C_1) de centre O, de rayon 8 cm.
Tracer un diamètre [XW].
Tracer la médiatrice de [XW], elle coupe (C_1) en A et F (tels que $XAWF$ soit un carré).
Soit Y le milieu de [OW] (qu'on pourra trouver en traçant la médiatrice de [OW]).
Tracer l'arc de cercle de centre Y, de rayon [YA], de A à (XW) qu'il coupe en Z.
Reporter l'ouverture AZ cinq fois sur le cercle en commençant par A, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On trouve ainsi les points C, E, G et I.
Tracer les diamètres : [CH], [EJ], [GB] et [ID].
Tracer un cercle (C_2) de centre O, de rayon 2,5 cm. Il coupe les rayons (en commençant par [OA], dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et en laissant de côté [OX] et [OW]) en a, b, c, d, e, f, g, h, i et j.
Tracer [Ab], [bC], [Cd], [dE], [Ef], [fG], [Gh], [hI], [Ij] et [jA].

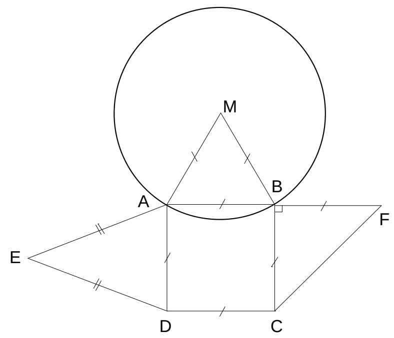
Exemple 5



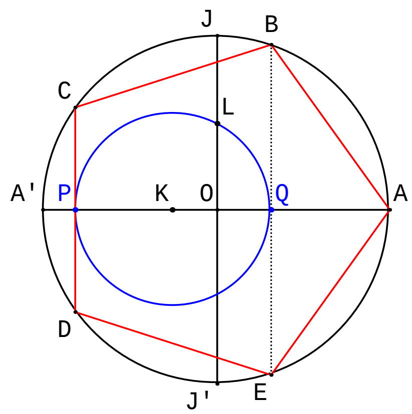
Observer la figure ci-contre.

Mettre par écrit, le plus simplement possible, toutes les instructions permettant par téléphone à quelqu'un de reproduire cette figure à l'identique.

Exemple 6
Même consigne avec la figure ci-contre.



Exemple 7
La figure ci-contre représente un pentagone régulier $ABCDE$ inscrit dans le grand cercle. La construction réalisée a été effectuée à l'aide d'un petit cercle de centre K tel que $OK = \frac{1}{4}OA'$ et passant par le milieu L de [OJ].



Mettre par écrit, le plus simplement possible, toutes les instructions permettant par téléphone à quelqu'un de reproduire cette figure à l'identique.

IV – Chercher, imaginer, organiser, développer une méthode

Les activités de recherche et les situations qui stimulent l'imagination contribuent à faire aimer les mathématiques. Il est essentiel d'en développer le goût chez les élèves dès le plus jeune âge. Les petits problèmes suivants en donnent quelques exemples, et on pourra utiliser avec profit certains exercices ludiques issus du Kangourou ou de divers rallyes mathématiques, quitte à les adapter.

Problème 1

Le 1er janvier 2006 tombe un dimanche. Quel jour de la semaine tombera le 1er janvier 2010 ?

Problème 2

Construire plusieurs rectangles dont une diagonale mesure 6 cm.

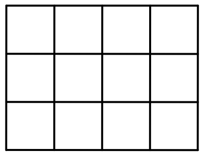
Problème 3

Trouver un nombre décimal ayant au maximum trois décimales, sachant que :

- ce nombre est compris entre $\frac{2}{7}$ et $\frac{5}{17}$;
- la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Problème 4

Dans la figure ci-contre, combien peut-on compter de rectangles ayant leurs quatre côtés entièrement dessinés ?



Indication sur la méthode à développer : il y a 12 rectangles de 1×1, 9 rectangles de 1×2, …, 1 rectangle de 3×4.

Problème 5

Pour multiplier 558 par 237, un élève procède de la façon suivante :

Il dresse le tableau ci-contre, dans lequel :

- chaque nombre de la colonne de gauche est la partie entière de la moitié du précédent ;
- chaque nombre de la colonne de droite est le double du précédent.

L’élève colorie alors tous les nombres de la colonne de droite qui sont en face d’un nombre impair, puis il les additionne : 474 + 948 + 1896 + 7584 + 121344.

Il prétend alors que la somme trouvée est égale au produit cherché.

La méthode qu’il utilise donne-t-elle le bon résultat ?

558	237
279	474
139	948
69	1896
34	3792
17	7584
8	15168
558	237
279	474
139	948
69	1896
34	3792
17	7584
8	15168
4	30336
2	60672
1	121344

Solution du problème 5 :

L’élève trouve le bon résultat, en effet :

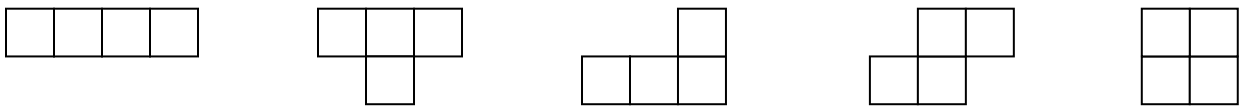
$$\begin{aligned}
558\times237 &= 279\times474\\
&= (139\times2+1)\times474\\
&= 139\times2\times474+474\\
&= (69\times2+1)\times948+474\\
&= 69\times2\times948+948+474\\
&= (34\times2+1)\times1896+948+474\\
&= 34\times2\times1896+1896+948+474\\
&= 34\times3792+1896+948+474\\
&= 17\times7584+1896+948+474\\
&= (8\times2+1)\times7584+1896+948+474\\
&= 8\times15168+7584+1896+948+474\\
&= 2\times2\times30336+7584+1896+948+474\\
&= 121344+7584+1896+948+474
\end{aligned}$$

Problème 6
Clara a dessiné le contour d’une assiette circulaire sur une feuille de papier. Il faut l’aider à trouver le centre du cercle qu’elle a obtenu, en utilisant seulement un compas et une règle non graduée.
Que peut-on suggérer à Clara ?

Problème 7
a) Tracer un cercle puis placer 2 points sur ce cercle. Combien de cordes peut-on tracer ?
b) Tracer un cercle puis placer 3 points sur ce cercle. Combien de cordes peut-on tracer ?
c) Tracer un cercle puis placer 4 points sur ce cercle. Combien de cordes peut-on tracer ?
d) Tracer un cercle puis placer *n* points sur ce cercle. Combien de cordes peut-on tracer ?

Problème 8 : les tétraminos
Un tétramino est une figure plane constituée de quatre carrés identiques accolés par au moins un côté.
1) Trouver les différents tétraminos.
2) Quel est le périmètre de chacun de ces tétraminos?
3) Quelle est l'aire de chacun de ces tétraminos?

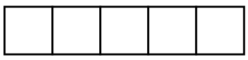
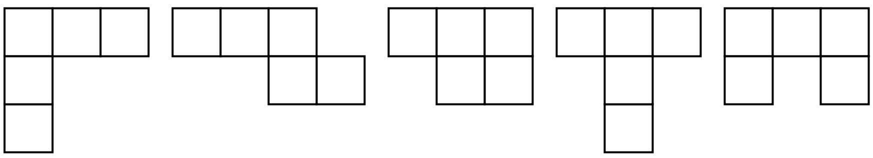
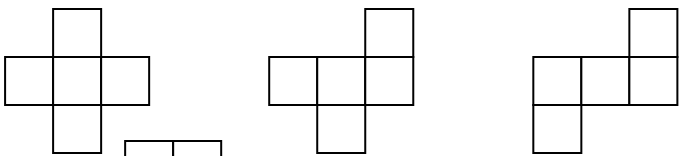
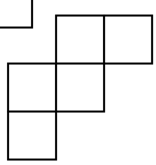
Solution du problème 8
Il existe 5 tétraminos différents (au retournement et à la symétrie près)



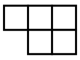
L’aire commune est égale à 4 carreaux ; ils ont tous un périmètre égal à 10, sauf le dernier.

Problème 9 : les pentaminos
Un pentamino est une figure plane constituée de cinq carrés identiques accolés par au moins un côté.
1) Trouver les différents pentaminos. Les tracer, les découper.
2) Quel est le périmètre de chacun de ces pentaminos?
3) Quelle est l'aire de chacun de ces pentaminos?

Solution du problème 9
Il existe 12 pentaminos différents (au retournement et à la symétrie près)
On organise la méthode de recherche en fonction du nombre maximal de carrés alignés horizontalement :

- 5 carrés alignés : 
- 4 carrés alignés + 1 : 
- 3 carrés alignés + 2 : 
- 3 carrés alignés +1 +1 : 
- 2 carrés alignés + 2 + 1 : 

Il y a donc au total 12 pentaminos.

Tous les pentaminos ont la même aire (5 carreaux) et un périmètre égal à 12 sauf un seul dont le périmètre est 10 : 

Prolongement possible du problème 9

1) On utilise les 12 pentaminos comme des pièces d'un puzzle.
On veut construire un rectangle en utilisant toutes les pièces, mais en ne les utilisant qu'une seule fois.

a) Quelle est l'aire de ce rectangle?
b) Combien mesurent les côtés de ce rectangle?
c) Représenter un tel rectangle. (chaque pièce doit apparaître de manière claire sur votre figure).

2) Peut-on aussi réaliser un carré avec 12 pièces?

Quelques éléments de solution :
Nombre de pavages possibles d'un rectangle avec ces 12 pentaminos :

- on peut constituer un rectangle de 3×20 : 2 solutions possibles ;
- on peut constituer un rectangle de 4×15 : 368 solutions possibles ;
- on peut constituer un rectangle de 5×12 : 1010 solutions possibles ;
- on peut constituer un rectangle de 6×10 : 2339 solutions possibles.

Les trois problèmes qui suivent sont issus du rallye mathématique de Bourgogne ; ils sont donnés avec leur solution.

Problème 10

Remplacer les •

par des chiffres pour que

l'affirmation encadrée soit

exacte.

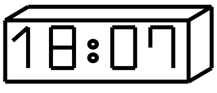
Dans ce cadre il y a exactement

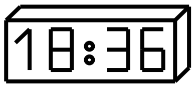
•	fois le chiffre	0
•	fois le chiffre	1
•	fois le chiffre	2
•	fois le chiffre	3
•	fois le chiffre	4
•	fois le chiffre	5
•	fois le chiffre	6
•	fois le chiffre	7
•	fois le chiffre	8
•	fois le chiffre	9

Solution du problème 10
La seule solution possible est :

présence	**1**	**7**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**
chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Problème 11
Ces deux pendules ont été mises à l'heure ce matin, en même temps.
A avance de **9** minutes par heure. B avance de **12** minutes par heure.
Quelle heure est–il ?

A 

B 

Solution du problème 11

En une heure **réelle,** B gagne 3 minutes sur A. Or B a 29 minutes d'avance sur A. Il s'est donc écoulé $\frac{29}{3}$ d'heures réelles depuis la mise à l'heure.

Pendant ce temps, B a donc avancé de $\frac{29}{3} \times 12 = 116$ minutes soit 1 h 56.

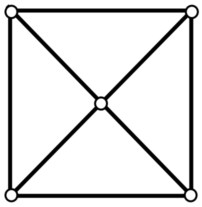
Il est donc 18 h 36 – 1 h 56 = 16 h 40.

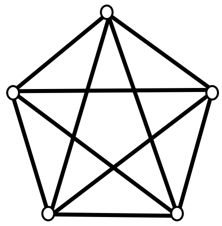
Problème 12

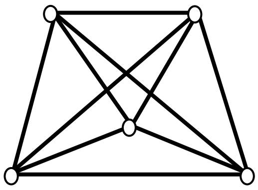
On veut construire sur une esplanade 5 fontaines de telle sorte que tous les triangles ayant pour sommets trois des fontaines soient isocèles, même les triangles aplatis.
Combien l'architecte peut-il proposer de plans différents ?

Solution du problème 12

L'architecte peut dessiner seulement trois plans :


Plan 1


Plan 2


Plan 3

V – Expérimenter, conjecturer

La recherche est essentielle à l'activité mathématique et la découverte des « lois du monde » représente sans conteste l'une des composantes principales du plaisir que l'on peut éprouver à pratiquer notre discipline. Nous entendons soutenir le pari que cette découverte est possible dès le plus jeune âge. Faire expérimenter pour faire découvrir, inciter à oser conjecturer, c'est mettre notre matière à la portée de tous – et pas seulement de quelques « spécialistes » ou de ceux qui ont « la bosse » - parmi lesquels nous rangeons les professeurs de la discipline. Bref, il s'agit de développer le goût des mathématiques. Les pistes suivantes sont une petite illustration des nombreuses activités possibles.

Problème 1. Avec le format de papier commercial

Prendre une feuille de papier rectangulaire de format A4. Le rectangle est nommé *ABCD*, où [*AB*] est l'un des grands côtés. Plier la feuille pour faire coïncider *A* sur *B* et *D* sur *C* . Déplier, puis marquer alors le milieu *I* du segment [*AB*]. Plier la feuille suivant la droite (*DI*) puis suivant la droite (*AC*) et déplier à nouveau.
Observer les deux plis réalisés. Que peut-on conjecturer ?

Problème 2. La somme des premiers entiers impairs

Calculer les sommes : $1+3$, puis $1+3+5$, puis $1+3+5+7$. Que peut-on conjecturer ? Deviner alors la valeur de la somme : $1+3+5+7+...+37+39$.

Problème 3. L'algorithme de Kaprekar (6ème)

Choisir un nombre de quatre chiffres différents.
Arranger ses chiffres par ordre croissant et noter le nombre obtenu.
Arranger ses chiffres par ordre décroissant et noter le nombre obtenu.
Faire la soustraction des nombres obtenus dans les questions b) et c).

Recommencer les questions a) ; b) et c) avec le résultat obtenu à la fin de la question 1.
Recommencer plusieurs fois, jusqu'à observer un phénomène particulier.
Choisir un autre nombre et recommencer.
Que semble-t-il se passer ?

Problème 4. Nombre maximal de droites déterminées par *n* points
Placer trois points *A*, *B* et *C* non alignés. Combien de droites différentes ces trois points déterminent-ils ?
Même questions avec 4 points, 5 points, 6 points. (Tracer les points de manière à obtenir un nombre maximum de droites).
Compléter le tableau suivant :

Nombre de points	Nombre maximum de droites déterminées
3	
4	
5	
6	

Une des expressions suivantes donne le nombre maximum de droites déterminées à partir de *n* points.
Entourer celle qui semble convenir.

$$n+2 \qquad n\times 2 \qquad n\times 2+3 \qquad \frac{n\times(n-1)}{2}$$

Quel est le nombre maximum de droites déterminées par 10 points ?

Problème 5. La différence des périmètres
1) a) Calculer la valeur exacte du périmètre d'un cercle de rayon 4 cm.
   b) Calculer la valeur exacte du périmètre d'un cercle de rayon 5 cm.
   c) Exprimer la différence de ces deux longueurs en fonction de π.

2) Mêmes questions avec deux cercles de rayons respectifs 16 cm et 17 cm.

3) *R* désignant un nombre strictement positif, émettre une conjecture sur la différence des périmètres de deux cercles de rayons respectifs *R* et (*R* + 1). (Cette conjecture pourra éventuellement être démontrée avec le calcul littéral et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

Problème 6. Un programme de calcul
Voici un programme de calcul :
- Choisir un nombre ;
- le multiplier par $\frac{2}{3}$;
- ajouter $\frac{2}{3}$;
- multiplier le tout par $\frac{3}{2}$;
- Annoncer le résultat obtenu.

1) a) Appliquer ce programme de calcul avec 4.
   b) Appliquer ce programme de calcul avec 3,5.
   c) Appliquer ce programme de calcul avec $\frac{2}{9}$.
2) Peut-on trouver le résultat de ce programme plus rapidement, sans faire tous les calculs demandés ?
3) Prouver la conjecture émise.

Problème 7. Un calcul fractionnaire (1)

1) Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\cdots$; b) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\cdots$; c) $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\cdots$; d) $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\cdots$.

2) Que peut-on conjecturer ?

Donner alors le résultat, sous forme simplifiée de la différence : $\frac{29}{30}-\frac{28}{29}=\cdots$.

Problème 8. Un calcul fractionnaire (2)

1) Vérifier les égalités suivantes :

a) $\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$;

b) $\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$;

c) $\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$.

2) Emettre une conjecture sur le calcul suivant :

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{16}\times\frac{1}{17}$$

Problème 9. Avec deux bissectrices d'un triangle rectangle ($5^{ème}$)

1) Tracer 5 triangles *ABC* rectangles en *B* de dimensions différentes.
2) Sur chacun des 5 triangles tracer les bissectrices des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$.
   On nomme I le point d'intersection de ses bissectrices
3) Pour chacun des 5 triangles tracés précédemment, mesurer l'angle $\widehat{CIA}$.
4) Que remarque-t-on ? Quelle conjecture peut-on émettre ?
5) Démontrer la conjecture précédente.

Problème 10. Droite de Simson

Dessiner un cercle, puis marquer quatre points *A*, *B*, *C* et *M* de ce cercle.
Tracer la droite perpendiculaire à (*AB*) passant par *M*, appeler *I* leur point d'intersection,
Tracer la droite perpendiculaire à (*AC*) passant par *M*, appeler *J* leur point d'intersection,
Tracer la droite perpendiculaire à (*BC*) passant par *M*, appeler *K* leur point d'intersection.
Que peux-on dire des points *I*, *J* et *K* ?

Problème 11. Une curiosité sur les fractions

1. Simplifier le plus possible la fraction $\frac{476}{252}$.
2. Calculer $\frac{4+7+6}{2+5+2}$ et comparer avec la réponse du 1.
3. Reprendre les questions 1. et 2. avec la fraction $\frac{364}{280}$.
4. Peut-on formuler une conjecture ?
5. Essayer avec d'autres fractions. Que penser alors de la conjecture ?

Problème 12. Somme des distances d'un point intérieur aux trois côtés d'un triangle équilatéral

1) Tracer un triangle équilatéral *ABC*.
2) a) Placer un point *M* situé à l'intérieur du triangle *ABC*.
   b) Mesurer la distance de *M* au côté [*AB*], la distance de *M* au côté [*AC*], la distance de *M* au côté [*BC*].
   c) Trouver une valeur approchée de la somme de ces trois distances.
3) Refaire la question 2) en choisissant un autre point *N* à l'intérieur du triangle.
4) Refaire la question 2) en choisissant un autre point *P* à l'intérieur du triangle.
5) Que peut-on conjecturer ?
6) Démontrer la propriété conjecturée par des considérations d'aires.

Problème 13. Un alignement mystérieux

Tracer deux droites (*AB*) et (*DE*).
Placer le point *C* sur la droite (*AB*) de façon à ce que (*DC*) et (*BE*) soient parallèles.
Placer le point *F* sur la droite (*DE*) de façon à ce que (*CF*) et (*AE*) soient parallèles.
Les droites (*DC*)et (*A*E) se coupent en *I*.
Les droites (*CF*)et (*BE*) se coupent en *J*.
Les droites (*AF*)et (*DB*) se coupent en *K*.
Comment semblent être les points *I*, *J* et *K* ?

Problème 14. Le théorème de Varignon

1) On considère un quadrilatère quelconque *ABCD*.
Placer les points *I*, *J*, *K* et *L* respectivement au milieu des segments [*AB*],[*BC*],[*CD*] et [*DA*]
Quelle semble être la nature du quadrilatère *IJKL* ?
2) Même exercice avec un cerf-volant *ABCD*.
3) Même exercice avec un quadrilatère *ABCD* dont les diagonales sont perpendiculaires.
4) Même exercice avec un quadrilatère *ABCD* dont les diagonales ont la même longueur.

Problème 15. Deux carrés et un triangle

Construire un triangle *ABC*.
A l'extérieur de ce triangle, construire les carrés *ABDE* et *ACFG*.
Que peut-on conjecturer pour les droites (*EC*) et (*BG*) ?

Problème 16. La conjecture de Syracuse

Choisir un nombre entier.

- Si le nombre est pair, on le divise par 2 et on obtient un nouveau nombre ;
- Si le nombre est impair, on le multiplie par trois, on ajoute 1 au résultat et on obtient un nouveau nombre.

On recommence la procédure avec le nouveau nombre obtenu.

Exemple : on applique cet algorithme au nombre 7 .

1) Vérifier qu'on obtient la suite de nombres : 7 ; 22 ; 11 ; 34 ; 17 ; 52 ; …
2) Continuer la suite obtenue. Remarque ?
3) Ecrire les suites obtenues avec les nombres de départ : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
4) Quelle conjecture peut-on émettre ?

Problème 17. Le nombre Phénix

1) Qu'arrive-t-il au nombre 052631578947368421 lorsqu'on le multiplie par 2 ? Remarque ?
2) Recommencer en multipliant ce nombre par 3 ; 4 ; 5 ; …
3) Quelle conjecture peut-on faire ? Cela marche-t-il indéfiniment ?
4) Que se passe-t-il lorsqu'on le multiplie par 19 ?

(Note : le Phénix est un oiseau mythique qui, lorsqu'on le brûle, renaît de ses cendres.)

Problème 18. Un air de famille

1) Combien valent : 1×1 ; 11×11 ; 111×111 ; 1111×1111 ; 11111×11111 ?
2) Quelle conjecture peut-on émettre ?

Problème 19. La formule d'Euler-Poincaré

1) Donner plusieurs prismes droits en perspective cavalière, avec des bases carrées, rectangulaires, hexagonales, octogonales, … et faire compléter le tableau suivant :

Nature de la base	F	S	A	$F + S - A$

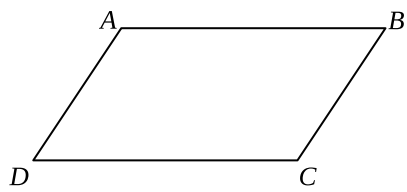
(F désigne le nombre de faces du prisme, S son nombre de sommets, A son nombre d'arêtes.)

2) Quelle conjecture peut-on émettre ?
3) Cela marche-t-il avec des solides (convexes) autres que des prismes ?

VI – Prouver, déduire, justifier, argumenter

Les justifications sont au cœur de l'activité mathématique, nul ne le niera. Les exercices suivants en sont quelques exemples, fournis par nos collègues, et envisageables en 6ème et 5ème. Nous les répartissons en deux catégories : les problèmes « ordinaires » et les « jeux du portrait », préconisés par les programmes.

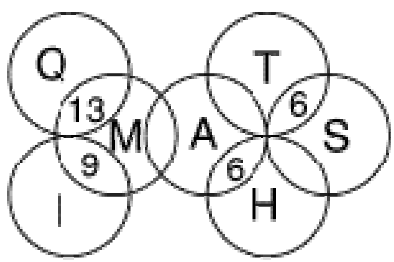
Problème 1.



Sur le schéma ci-contre, ABCD est un parallélogramme.
1. Complète le schéma en plaçant :
- le point I, milieu de $[AC]$;
- le point J, symétrique du point I par rapport à la droite (BC) ;
- le point M, symétrique du point D par rapport à la droite (BC).

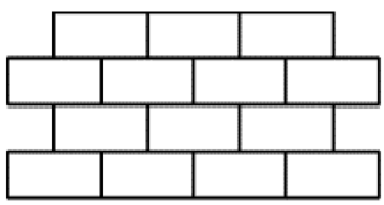
2. Tracer la droite (MJ). D'après le schéma, est-ce que cette droite passe par B ?
3. Prouver le résultat conjecturé à la question 2.

Problème 2 (5ème, difficile)



Les 7 disques Q, I, M, A, T, H, S ont chacun une valeur différente comprise entre 1 et 7. Dans certaines intersections de deux disques, on a indiqué la somme des valeurs de ces deux disques. **Quelle est la somme des valeurs des cinq disques M, A, T, H, S ?**
A noter que l'intersection des disques M et A existe bien.

Problème 3 (6ème)



Ce mur est construit à partir de briques de couleurs jaune, brune et rouge. Deux briques qui se touchent sont toujours de couleurs différentes. Les briques jaunes valent 6 F, les rouges 7 F et les brunes 8 F.
À combien ce mur reviendra-t-il, au minimum?

Jeu n° 1. Quel est ton nombre ?

Principe du jeu : *C'est le principe du jeu « Qui est-ce »*
2 joueurs
20 cartes nombres devant chaque joueur (ou plus ou moins). Les deux joueurs ont les mêmes nombres devant eux.
Chaque joueur choisit un nombre parmi les 20 possibles en le gardant secret. Le premier qui découvre le nombre de son adversaire gagne la partie.
Pour cela, chaque joueur, à tour de rôle, pose une question à son adversaire qui lui permettra d'éliminer (en retournant les cartes) les nombres qui ne correspondront pas à la question posée.
Une fois qu'il ne reste plus qu'une carte retournée, ce doit être (s'il n'y a pas eu d'erreur), le nombre de son adversaire.

Variantes du jeu :

***** On peut jouer avec des nombres entiers ou des nombres décimaux.
* Chaque joueur à son tour tire une carte question l'obligeant à poser une question à l'aide du début de phrase formulée sur cette carte. Ceci permet aux élèves d'entrevoir d'autres questions que pair / impair ou plus grand / plus petit que.

Questions possibles :
Est-ce que ton nombre est pair / impair ?
Est-ce que ton nombre est plus petit que … ?
Est-ce que ton nombre est plus grand que … ?
Est-ce que ton nombre est divisible par … ?
Est-ce que ton nombre comporte un … ?
Est-ce que ton nombre possède deux chiffres identiques ?
Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des unités ?
Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des dizaines ?
Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des centaines ?
Est-ce que la somme de ces chiffres est égale à … ?
Est-ce que la somme de ses chiffres est inférieure à … ?
Est-ce que la somme de ses chiffres est supérieure à … ?
Est-ce que son chiffre des centaines est plus grand que celui des dizaines ?
Est-ce que son chiffre des unités est le plus grand de ses chiffres ?
Est-ce que ton nombre possède deux chiffres pairs ?
Est-ce que ton nombre possède deux chiffres supérieurs à … ?
Est-ce que ton nombre est compris entre … et … ?
Est-ce que ton nombre comporte un chiffre impair ?

Si on utilise des nombres décimaux :
Est-ce que la partie entière de ton nombre est …?
Est-ce que la partie décimale de ton nombre est …?
Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des dixièmes ?
Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des centièmes ?
Est-ce que ton nombre possède un zéro inutile ?

EXEMPLE DE CARTES NOMBRE :

147	218	378	410
582	631	744	804
973	116	252	361
485	557	676	709
871	992	067	034

EXEMPLE DE FICHES QUESTION

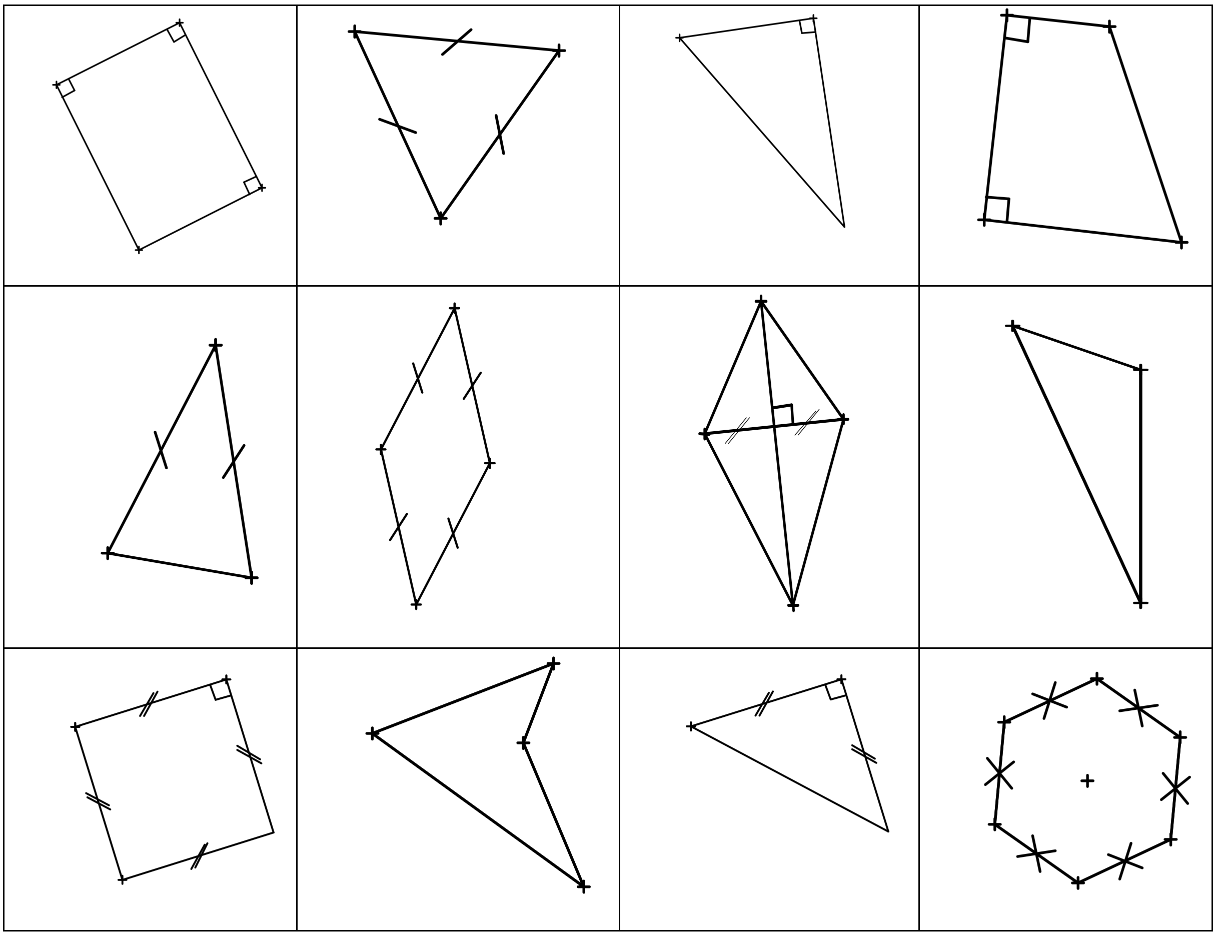
Est-ce que ton nombre est pair / impair ?	Est-ce que ton nombre est plus petit que … ?	Est-ce que ton nombre est plus grand que … ?
Est-ce que ton nombre est divisible par … ?	Est-ce que ton nombre comporte un … ?	Est-ce que ton nombre possède deux chiffres identiques ?
Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des unités ?	Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des dizaines ?	Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des centaines ?
Est-ce que ton nombre possède un zéro inutile ?	Est-ce que la somme de ses chiffres est égale à … ?	Est-ce que la somme de ses chiffres est inférieure à … ?
Est-ce que la somme de ses chiffres est supérieure à … ?	Est-ce que la partie entière de ton nombre est … ?	Est-ce que la partie décimale de ton nombre … ?
Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des dixièmes ?	Est-ce que ton nombre possède un … pour chiffre des centièmes ?	

Jeu n° 2. Reconnaître le portrait du bon quadrilatère (6ème)

Sont fournis aux élèves :

- Le tableau des figures ;
- des grilles pour jouer ;
- une liste de mots interdits.

Exemple d'un tableau de figures :



Remarque :
Nous voulons que les élèves raisonnent à partir des hypothèses données par le codage, d'où le choix du trapèze rectangle qui permet ainsi de justifier que les droites sont parallèles.

Grilles pour « jouer »

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

Exemples de mots interdits

- Losange
- Trapèze
- Hexagone
- Isocèle
- Carré
- Rectangle
- Equilatéral

Principe :

1) On joue en classe.
Les élèves disposent du tableau des figures, de la liste de mots interdits et de grilles pour jouer.
Un élève choisit une figure, puis il répond par oui ou par non aux questions posées par les autres. Les numéros ne correspondant pas à la réponse sont rayés sur la grille.
Exemple : si la réponse « oui » à la question « Le polygone possède t-il trois côtés ? »
Les élèves rayent les cases a, d, f, g, i, j et l.

X	b	c	X
e	X	X	h
X	X	k	X

On procède ainsi par élimination, jusqu'à ce que la figure correspondante soit identifiée.

Variantes :

1a) Questions libres et nombre de questions illimité.

1b) Questions libres et nombre de question limité à quatre. Les élèves doivent préalablement réfléchir aux questions à poser afin de déterminer, à coup sûr, la bonne figure.

1c) Questions posées uniquement à partir d'une liste de questions donnée aux élèves, ces questions portant par exemple sur les propriétés des figures, des côtés, des symétries…

2) On simule les questions et leurs réponses.

Les élèves disposent du tableau des figures, et de grilles pour jouer et doivent déterminer la figure correspondante. Ce principe pouvant, par exemple, être adopté en contrôle.

Exemple d'exercice de simulation :

Voici les questions posée par les élèves et les réponses qui ont été données.

- *Le polygone possède t-il quatre côtés ? oui*
- *Possède-t-il au moins deux côtés consécutifs perpendiculaires ? oui*
- *Les côtés opposés du polygone ont-ils même longueur deux à deux ? oui*
- *Existe-t-il deux côtés consécutifs du polygone de même longueur ?non*

A partir du tableau de figures, déterminer la figure correspondante.

3) A partir de la réponse.

A partir de la figure donnée, et de la liste de mots interdits, les élèves doivent proposer des questions permettant de l'identifier.

Remarque :

Possibilité de poursuivre cette activité en 5è, avec par exemple des questions portant uniquement sur les propriétés des diagonales de quadrilatères, des symétries…

Jeu n°3. Jeu d'arithmétique et géométrie

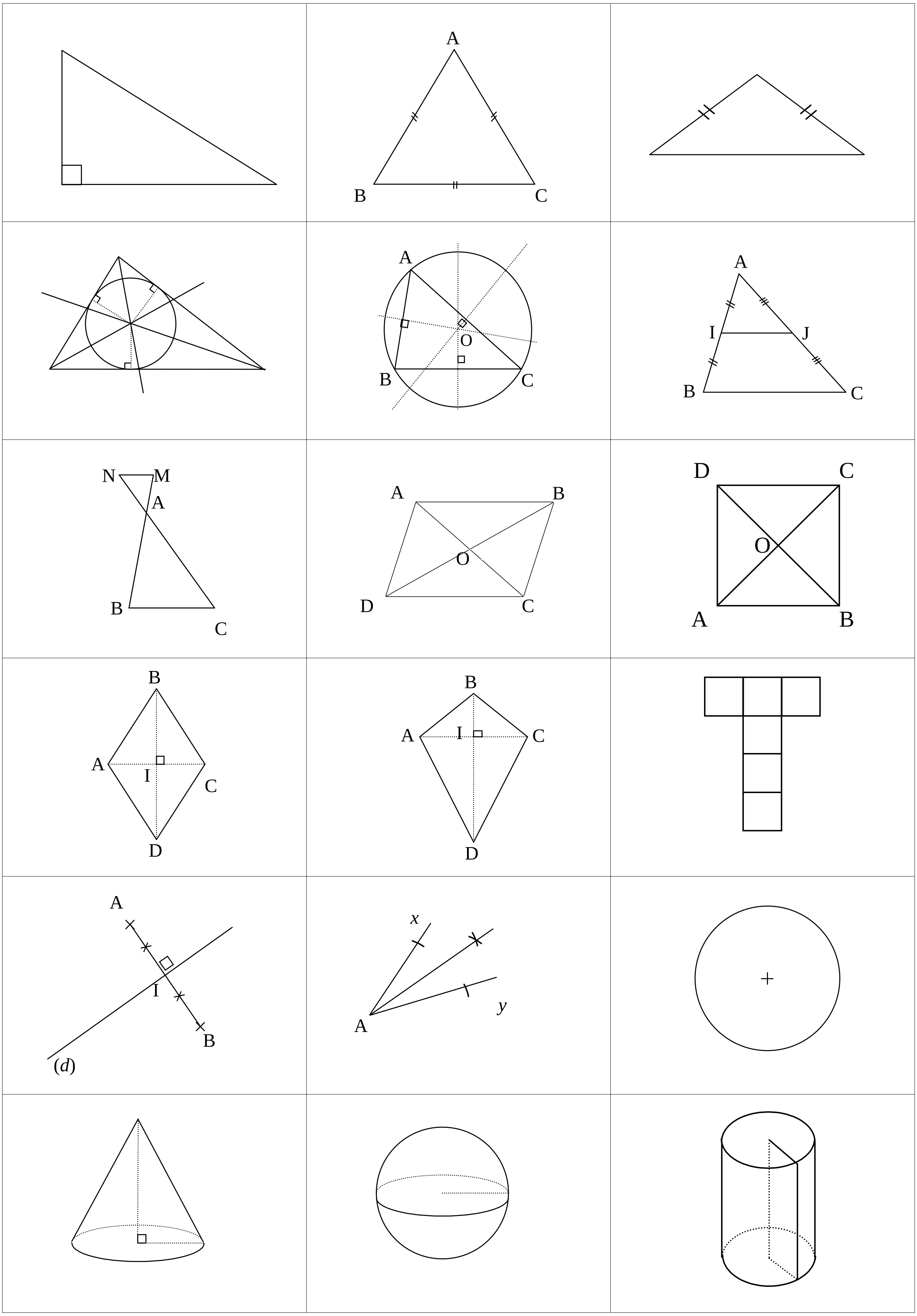
CONSTITUTION :

- 2 jeux de cartes : un jeu « Arithmétique», un jeu « Géométrie » à découper sur une feuille cartonnée.
- Un plateau de progression (type jeu de l'oie).
- Des pions, pour la progression.
- Un dé à jouer.
- Un arbitre ayant des connaissances mathématiques

REGLES DU JEU :

- Chaque joueur choisit son pion et le dispose sur la première case du plateau.
- A tour de rôle, chaque joueur devient le meneur. Il choisit entre les jeux « Arithmétique » et « Géométrie » et tire une carte du jeu choisi. Il doit faire deviner ce qui est représenté sur la carte. Pour cela des questions lui sont posées à **propos des propriétés** de la figure ou du nombre tiré. Questions auxquelles il ne peut répondre que par OUI ou par NON.
- **Aucune question directe n'est acceptée (à l'appréciation de l'arbitre).**
- Les questions lui sont posées par ses adversaires. Chaque joueur, tour à tour et en commençant par le voisin de droite du meneur, pose sa question au meneur, il peut ensuite donner sa proposition s'il le souhaite. Mais il n'a droit qu'à une et une seule proposition pour chaque carte tirée.
- Le joueur qui trouve la bonne solution, gagne le droit de lancer le dé pour savoir de combien il doit avancer son pion.
- Le meneur devient le voisin de droite de l'ancien meneur et le jeu peut continuer.
- La partie se termine quand un joueur atteint la fin du parcours sur le plateau.

GEOMETRIE



ARITHMETIQUE

Constante pi	Nombre d’or	121
28	0	1/2
495	$\sqrt{2}$	$-$ 99

Jeu n° 4. Le jeu du portrait
⇨ **Niveau :** A partir de la classe de Sixième
Selon le niveau, on enlèvera les cartes qui correspondent aux propriétés encore inconnues des élèves.

Contenu du jeu

⇨ **44 cartes propriétés**
- 7 cartes : axes et centre de symétrie
- 7 cartes : diagonales
- 15 cartes : côtés
- 15 cartes : angles

⇨ **17 cartes figures**
- 5 cartes : triangles
- 9 cartes : quadrilatères
- 1 carte : pentagone régulier
- 1 carte : hexagone régulier
- 1 carte : cercle

⇨ **Un « tapis » de jeu**
(à imprimer et agrandir au format A3)

Déroulement du jeu

⇨ **Nombre de joueurs :** A partir de 3 joueurs

⇨ **But du jeu :** Les joueurs doivent deviner le plus rapidement possible la nature de la figure que le Meneur de Jeu a en mains, en utilisant les propriétés mathématiques à leur disposition (Cartes Propriétés).

⇨ **Déroulement :**

Un Meneur de Jeu est choisi au hasard parmi les joueurs.
Le Meneur de Jeu mélange les Cartes Propriétés, puis distribue l'ensemble des cartes, une par une, face cachée, aux autres joueurs.
Le meneur de jeu dispose le tapis de jeu devant lui, face aux joueurs, puis tire une Carte Figure au hasard, qu'il ne doit pas montrer aux autres joueurs.

Le joueur placé à gauche du meneur de jeu débute la partie.
A chaque tour, chaque joueur peut proposer une propriété en utilisant une de ses Cartes Propriétés qu'il pose alors devant lui. Le Meneur de Jeu répond par Vrai ou Faux uniquement ; il prend la Carte Propriété du joueur et la pose sur le tapis de jeu dans la ligne correspondant à sa réponse. Le joueur peut ensuite proposer un nom pour la figure à deviner. S'il ne propose pas de réponse, le joueur suivant joue à son tour…
Le joueur peut également proposer directement une réponse. Il ne peut alors plus poser de question avant le prochain tour.

Si le joueur a donné la bonne réponse, la partie est terminée. Le joueur marque un point. Il devient à son tour le Meneur de Jeu et débute une nouvelle partie.

Si le joueur a donné une réponse fausse, il est éliminé. Il distribue de façon équitable ses Cartes Propriétés aux joueurs restants, et il attend la fin de la partie, sans avoir le droit d'intervenir.

Si tous les joueurs sont éliminés, le Meneur de jeu remporte la partie. Il marque un point, reste Meneur et débute une nouvelle partie.

Si un joueur s'aperçoit au cours de la partie que le Meneur de jeu a commis une erreur lors d'une réponse, il peut interrompre la partie et expliquer l'erreur commise. Si l'erreur est avérée, le joueur remporte la partie, marque un point, devient Meneur de Jeu et débute une nouvelle partie… Dans le cas contraire, le joueur est éliminé, et doit distribuer ses Cartes Propriétés aux autres joueurs…
Si les joueurs ne peuvent pas se mettre d'accord, ou en cas de contestation, le professeur tranche.

Le gagnant est le joueur qui a le plus de points à la fin de la partie.

Variantes possibles

Les Cartes Propriétés sont classées par type : Axes de symétrie, côtés, diagonales et angles. Le professeur peut aussi tirer une Carte Figure au hasard, la montrer aux élèves, et leur demander de caractériser la figure choisie en utilisant le minimum de Cartes Propriétés, parmi tous les types, ou seulement parmi des types sélectionnés… de nombreuses variantes sont ainsi possibles.

Propriétés Vraies	

Propriétés Fausses	

AXES ET CENTRES DE SYMETRIE

S Axes et centres de Symétrie

Propriété n°1

La figure admet un ou plusieurs axes de symétrie.

S Axes et centres de Symétrie

Propriété n°2

La figure admet un centre de symétrie.

S Axes et centres de Symétrie

Propriété n°3

La figure admet exactement un axe de symétrie.

S Axes et centres de Symétrie

Propriété n°4

La figure admet exactement deux axes de symétrie.

S Axes et centres de Symétrie

Propriété n°5

La figure admet exactement trois axes de symétrie.

S Axes et centres de Symétrie

Propriété n°6

La figure admet exactement quatre axes de symétrie.

S Axes et centres de Symétrie

Propriété n°7

La figure admet plus de quatre axes de symétrie.

PROPRIETES DES DIAGONALES

D — Propriétés des diagonales

Propriété n°1

La figure possède des diagonales

D — Propriétés des diagonales

Propriété n°2

La figure possède exactement deux diagonales.

D — Propriétés des diagonales

Propriété n°3

La figure possède des diagonales de même milieu.

D — Propriétés des diagonales

Propriété n°4

La figure possède exactement cinq diagonales.

D — Propriétés des diagonales

Propriété n°5

La figure possède des diagonales de même longueur.

D — Propriétés des diagonales

Propriété n°6

La figure possède des diagonales perpendiculaires.

D — Propriétés des diagonales

Propriété n°7

La figure possède des diagonales de même milieu.

PROPRIETES DES COTES

C — Propriétés des côtés

Propriété n°1

La figure possède des côtés.

C — Propriétés des côtés

Propriété n°2

La figure possède trois côtés.

C — Propriétés des côtés

Propriété n°3

La figure possède quatre côtés.

C — Propriétés des côtés

Propriété n°4

La figure possède plus de quatre côtés.

C — Propriétés des côtés

Propriété n°5

La figure possède des côtés de même longueur.

C — Propriétés des côtés

Propriété n°6

La figure possède exactement deux côtés de même longueur.

C — Propriétés des côtés

Propriété n°7

La figure possède exactement trois côtés de même longueur

C — Propriétés des côtés

Propriété n°8

La figure possède exactement quatre côtés de même longueur.

C — Propriétés des côtés

Propriété n°9

La figure possède plus de quatre côtés de même longueur.

C

Propriétés des côtés

Propriété n° 10

La figure possède deux côtés consécutifs de même longueur.

C

Propriétés des côtés

Propriété n° 11

La figure possède trois côtés consécutifs de même longueur.

C

Propriétés des côtés

Propriété n° 12

La figure possède au moins une paire de côtés parallèles.

C

Propriétés des côtés

Propriété n° 13

La figure possède exactement une paire de côtés parallèles.

C

Propriétés des côtés

Propriété n° 14

La figure possède exactement deux paires de côtés parallèles.

C

Propriétés des côtés

Propriété n° 15

La figure possède plus de deux paires de côtés parallèles.

PROPRIETES SUR LES ANGLES

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°1

Il est possible d'obtenir 180° en additionnant plusieurs mesures d'angles de la figure

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°2

Il est possible d'obtenir 360° en additionnant plusieurs mesures d'angles de la figure

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°3

La figure possède au moins une paire d'angles complémentaires.

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°4

La figure possède deux paires d'angles complémentaires.

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°5

La figure possède au moins une paire d'angles supplémentaires.

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°6

La figure possède deux angles égaux.

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°7

La figure possède trois angles égaux.

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°8

La figure possède au moins deux angles égaux.

A — Propriétés sur les angles

Propriété n°9

La figure possède quatre angles égaux.

A

Propriétés sur les angles

Propriété n°10

La figure possède plus de quatre angles égaux.

A

Propriétés sur les angles

Propriété n°11

La figure possède au moins un angle droit.

A

Propriétés sur les angles

Propriété n°12

La figure possède exactement un angle droit.

A

Propriétés sur les angles

Propriété n°13

La figure possède exactement deux angles droits.

A

Propriétés sur les angles

Propriété n°14

La figure possède exactement trois angles droits.

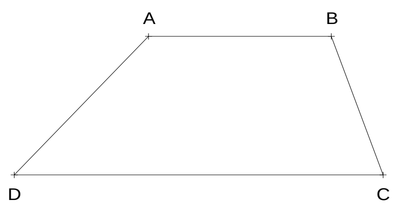
A

Propriétés sur les angles

Propriété n°15

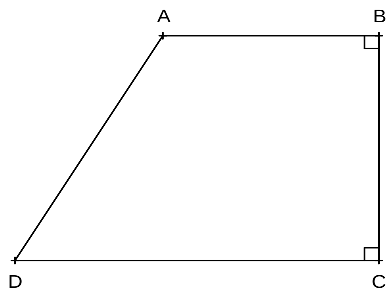
La figure possède quatre angles droits.

Q Quadrilatères



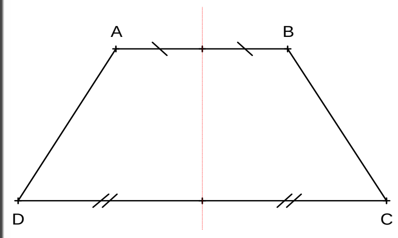
Trapèze

Q Quadrilatères



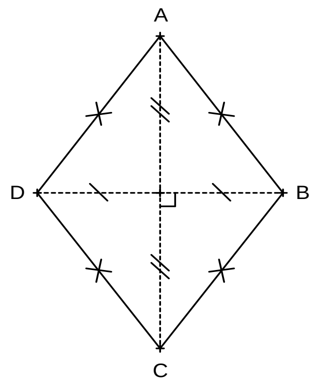
Trapèze rectangle

Q Quadrilatères



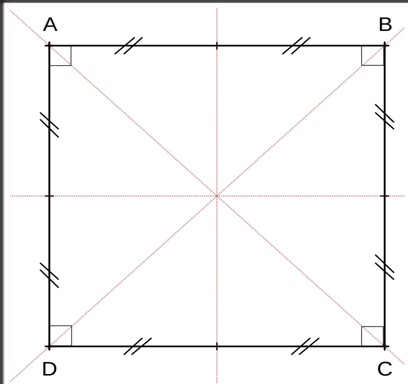
Trapèze isocèle

Q Quadrilatères



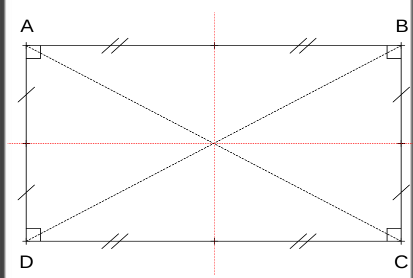
Losange

Q Quadrilatères



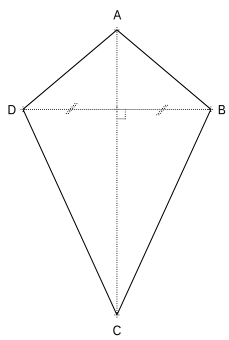
Carré

Q Quadrilatères



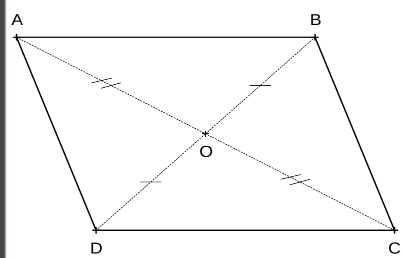
Rectangle

Q Quadrilatères



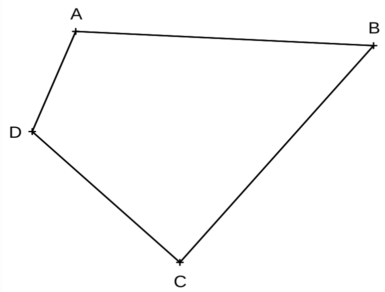
Cerf-volant

Q Quadrilatères



Parallélogramme

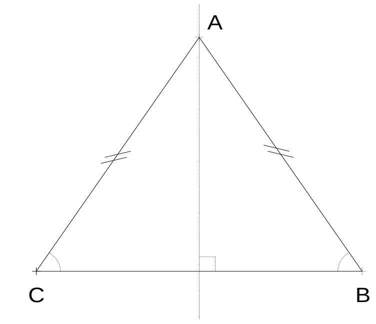
Q Quadrilatères



Quadrilatère quelconque

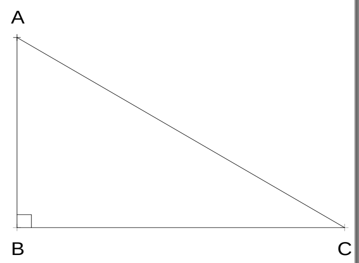
TRIANGLES

Triangles



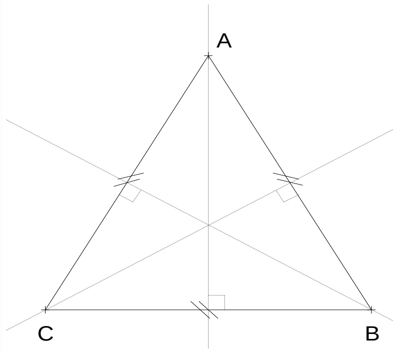
Triangle isocèle

Triangles



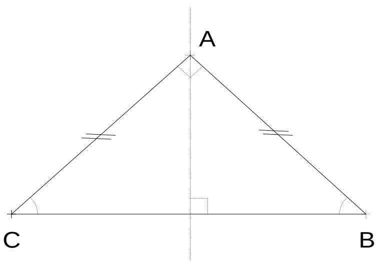
Triangle rectangle

Triangles



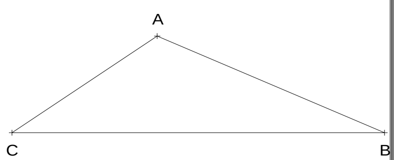
Triangle équilatéral

Triangles



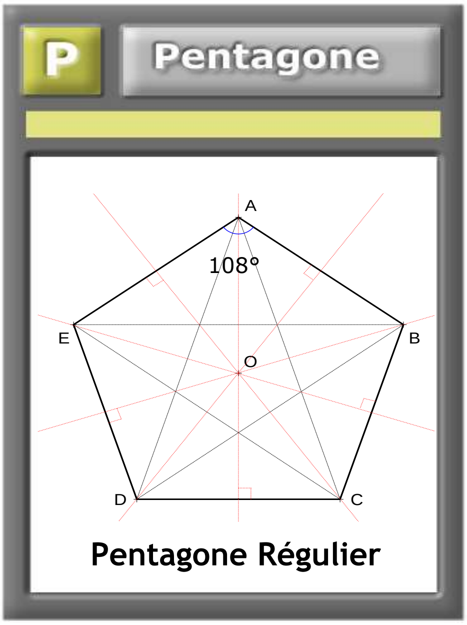
Triangle isocèle rectangle

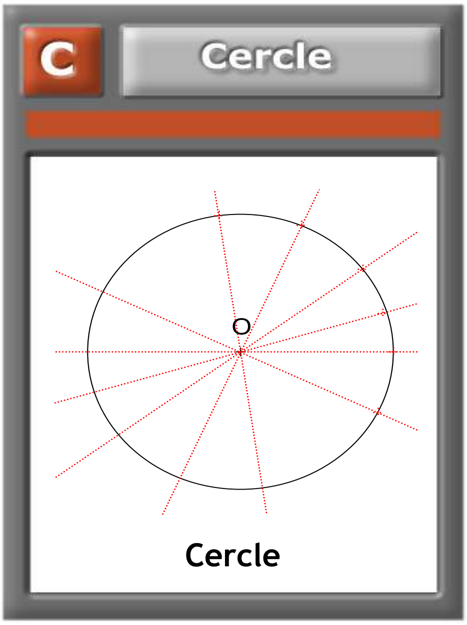
Triangles

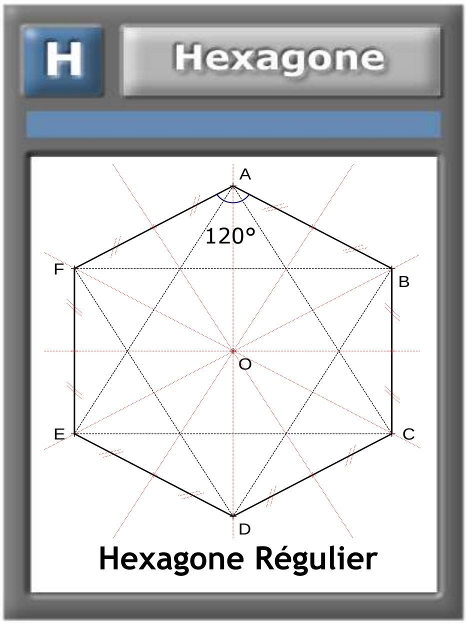


Triangle scalène

PENTAGONE – CERCLE - HEXAGONE







VII – Contrôler un résultat

Plusieurs outils peuvent être utilisés pour contrôler un résultat, parmi lesquels il faut citer :

- l'évidence dune situation ;
- le bon sens ;
- l'ordre de grandeur ;
- les critères de divisibilité ;
- le chiffre des unités ;
- etc.

Les exemples qui suivent en sont une illustration.

Exemple 1

Adèle, Antoine, Adeline et Arthur font l'exercice suivant :

« Les roues du vélo d'Alfred mesurent 76 cm de diamètre. En prenant 3,14 comme valeur approchée du nombre π, quelle distance parcourt Alfred en vélo lorsqu'il fait 10 tours de roue ? »
Adèle a trouvé 23,864 m ; Antoine a trouvé 2386 m ; Adeline a trouvé 21,49 m et Arthur a trouvé 23864 cm.

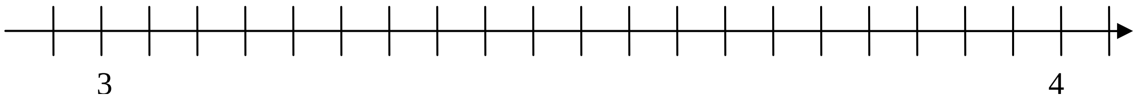
« Un (ou une) seul(e) d'entre vous a juste », a dit le professeur, « et pour les autres, il n'y a pas besoin de faire vraiment le calcul pour être sur que ce soit faux ! »…
Mais comment a-t-il pu faire pour détecter chacune des trois solutions fausses ?

Exemple 2

Sachant que le prix du kilogramme de raisin est 2,5€, calculer le prix de 900g de raisin.
Contrôler ce résultat en remarquant que 900g, c'est à peu près 1kg.

Exemple 3

Sur la droite graduée, placer les points *A* et *B* d'abscisses respectives 3,6 et $\frac{16}{5}$.



Comparer 3,6 ; $\frac{16}{5}$ et 3,5 puis contrôler sur le schéma la position des points.

Exemple 4

Contrôler chacune des égalités suivantes :

a) $185\ 857 \times 999\ 999 = 185\ 856\ 807\ 143$. (Critères de divisibilité.)

b) $28,745 \times 304 = 873,848$. (Ordre de grandeur.)

c) $1168 \times \frac{15}{16} = 1241$. (Rangement.)

VIII – Mettre en forme une solution

Un problème a été lancé en classe, des pistes de solutions ont été dégagées….

La mise en forme d'une solution fait appel à l'esprit de synthèse des élèves, et cela mérite d'être travaillé en soi. Si le travail est donné à la maison, on peut aussi avoir quelques exigences de rédaction. Voici quelques exemples.

Problème 1

« Pour son anniversaire, Jacques a invité ses trois amis Julie, Julien et Juliette.
Il leur sert à boire dans des verres cylindriques de 12 cm de haut et 5 cm de diamètre.
Combien boiront-ils chacun de verres pleins s'ils se partagent équitablement le contenu d'une maxi-bouteille de Bangaga, la boisson à l'ananas ? »

Au brouillon, l'un des élèves a écrit :
2 = 2000 cm^3
$3,14 \times 2,5 \times 2,5 \times 12 = 235,5$
2000 : 339 = 8,5 : 4 = 2

En reprenant les opérations ci-dessus, mais en corrigeant les petites (ou les grosses) erreurs commises par l'élève, rédige une solution de ce problème telle que ton professeur de mathématique t'a appris à le faire.

Problème 2

Pierre qui a 12 ans, ses parents et sa petite sœur de 8 ans décident de passer quelques jours à la mer dans un centre de vacances qui affiche le tarif journalier suivant :

Adultes : 30 € - Enfants (jusqu'à 14 ans) : 17,50 € - Animaux : 5 €

Combien de jours pourront-ils passer dans ce centre de vacances sachant qu'ils ont prévu un budget de 1200 € et que Pierre emmène son chien ?

Voici un brouillon de solution :
$30 \times 2 + 17{,}50 \times 2 + 5 = 100$ € et $1200 : 100 = 12$ jours.

Rédiger la solution complète à partir de ce brouillon en respectant le plan suivant :

1. Introduction : que faut-il trouver finalement dans cet exercice ?
2. Développement : détailler tous les calculs nécessaires pour y parvenir en expliquant à chaque fois ce qu'ils représentent. (Ecrire ces calculs en ligne)
3. Conclusion : répondre à la question finale par une phrase.

Problème 3

On considère un rectangle *ABCD*.
Tracer la droite (AC).
Tracer la droite passant par B et perpendiculaire à (AC) : elle coupe (AC) en E.
Tracer la droite passant par D et perpendiculaire à (AC) : elle coupe (AC) en F. Faire la figure.
Que dire des droites (BE) et (DF) ? Le prouver.

Voici un brouillon de la solution :

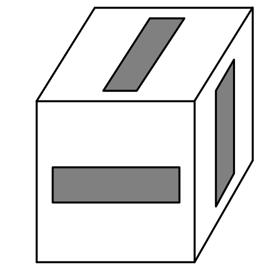
$$\text{Si } \left.\begin{array}{l}(BE)\perp(AC)\\ \text{et}\\ (DF)\perp(AC)\end{array}\right\}\text{alors } (BE)\parallel(DF).$$

Rédiger la solution complète à partir de ce brouillon en respectant le plan suivant :

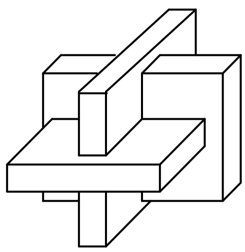
1. Introduction : que faut-il prouver dans cet exercice ?
2. Développement :
   a) Quelles sont les hypothèses , autrement dit quelles sont les données qui permettent de faire la figure ?
   b) Quelle propriété du cours de géométrie permet d'apporter la preuve recherchée ?
3. Conclusion : répondre à la question finale par une phrase du type « **On sait que……**suivi des données utiles ; **or ……**suivi de la propriété ; **donc ……**suivi de la conclusion.

Problème 4

Dans un cube de bois de côté **10** cm, sont percées de part en part trois fentes rectangulaires parallèlement aux arêtes du cube.
Chaque rectangle mesure **8** cm $\times$ **2** cm et a le même centre que la face qui le contient. Quel est le volume restant ?



Voici un brouillon de solution :
Volume total : 1000 cm^3 .
Volume enlevé : 6 parallélépipèdes + le petit cube central.
Volume restant : $1000 - 6 \times 64 - 8 = 608$.



Rédiger la solution complète à partir du brouillon précédent.

CINQUIÈME PARTIE :
Les fractions

A – DE NOUVEAUX NOMBRES : LES FRACTIONS

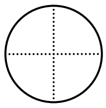
Le nouveau programme introduit les fractions en sixième, à la fois pour assurer une meilleure continuité avec l'école primaire, et pour ménager une plus grande progressivité dans l'apprentissage, tout au long du collège. En particulier, un des enjeux de l'enseignement sera, à travers les travaux proposés et en développant les compétences requises par les programmes des différents niveaux, d'amener les élèves à construire progressivement l'idée selon laquelle « *le quotient* $\frac{a}{b}$ *est un nombre* », et pas toujours un nombre décimal. Les rubriques B, C, D, présentent des exemples qui tentent d'aller dans ce sens. La rubrique E fait état de quelques situations qui peuvent faire prendre conscience de la différence entre fractions et décimaux.

B – LES FRACTIONS D'AIRES

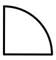
Associer les fractions à des aires planes, l'unité d'aire étant donnée, contribue à conférer aux fractions le statut de nombres à part entière. En voici quelques exemples.

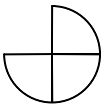
Exemple 1

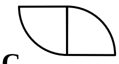
L'unité d'aire est l'aire du disque ci-contre.

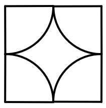


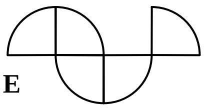
Exprimer par une fraction l'aire de la partie hachurée de chacune des figures suivantes.

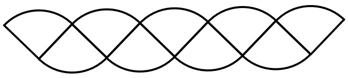
A 

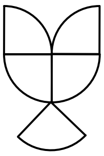
B 

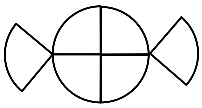
C 

D 

E 

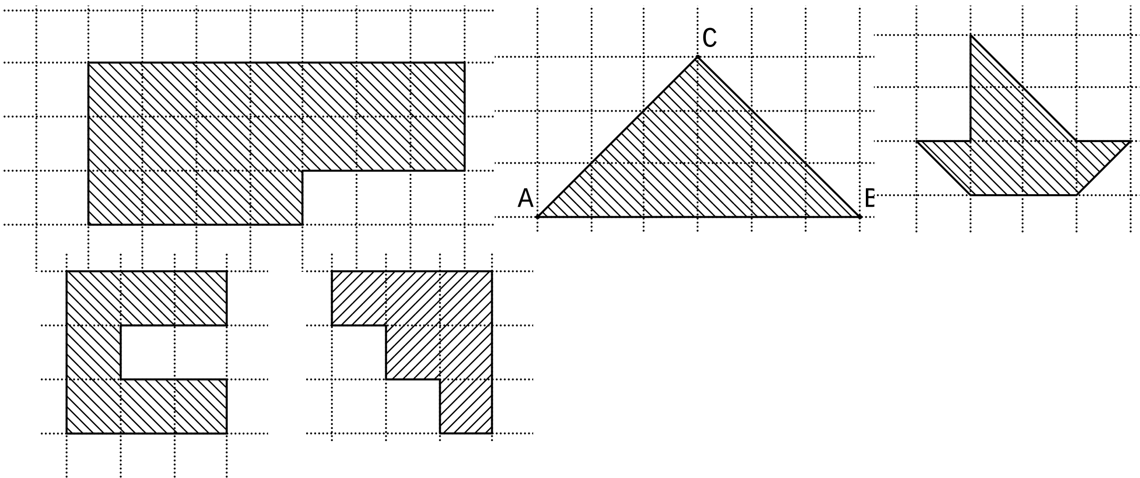
F 

G 

H 

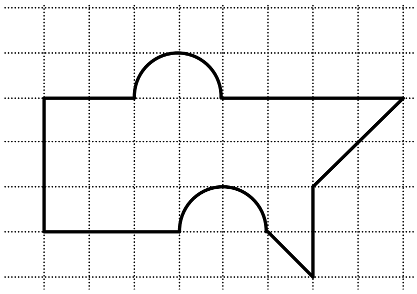
Exemple 2

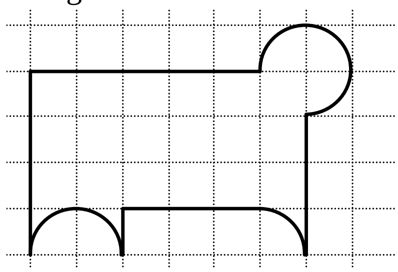
L'unité d'aire étant le carreau, indiquer les aires des figures suivantes :



Exemple 3

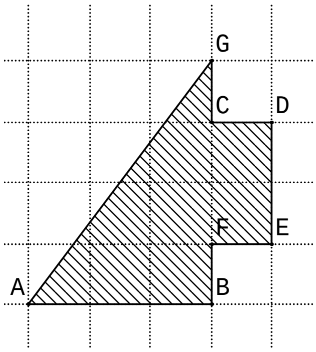
L'unité d'aire étant le carreau, indiquer les aires des figures suivantes :

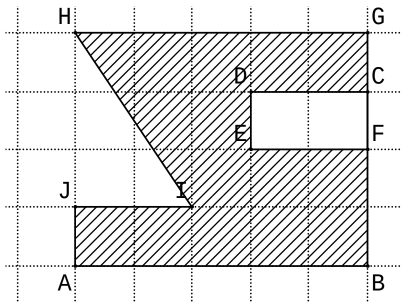




Exemple 4

Calcule l'aire des figures suivantes en cm². On suppose que les carreaux ont pour côté 1 cm.

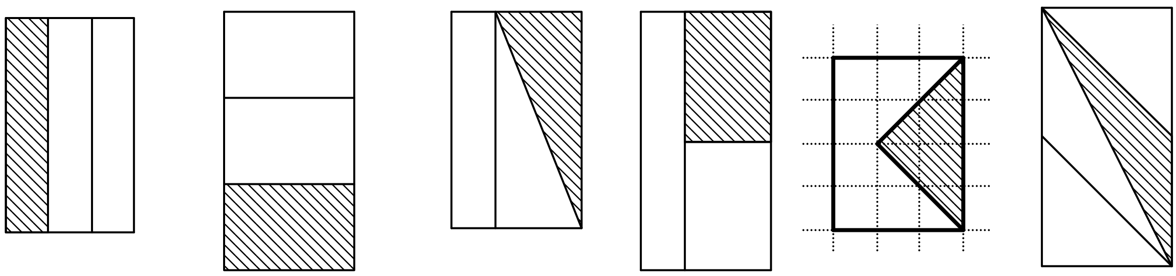




Exemple 5

Vrai ou faux ?

L'aire de chaque surface hachurée est égale au tiers de l'aire du grand rectangle.

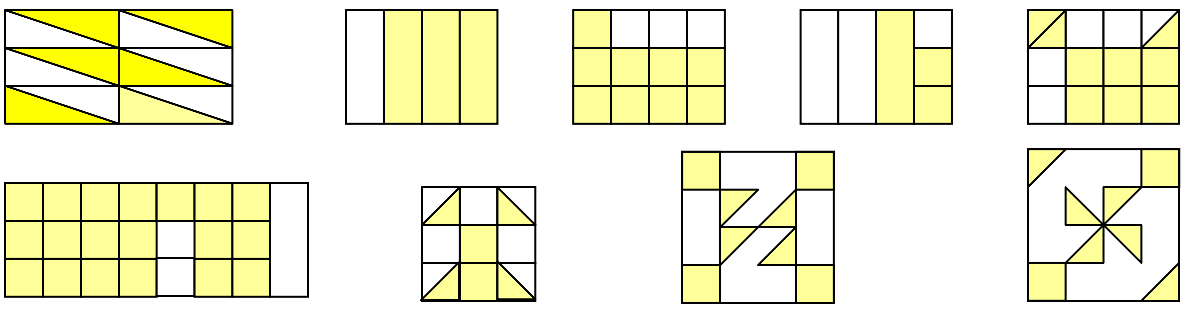


Les partages sont « réguliers »

Exemple 6

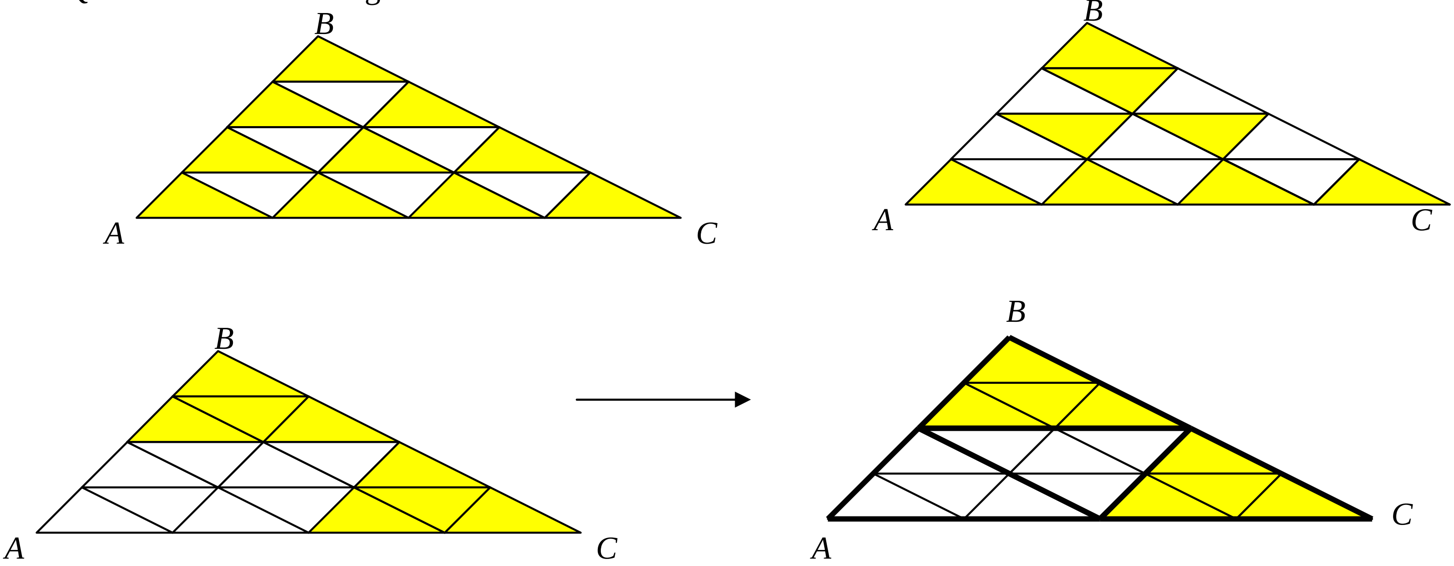
Quelle fraction de la figure est-elle coloriée ?

Vous pouvez faire des tracés pour répondre plus facilement :



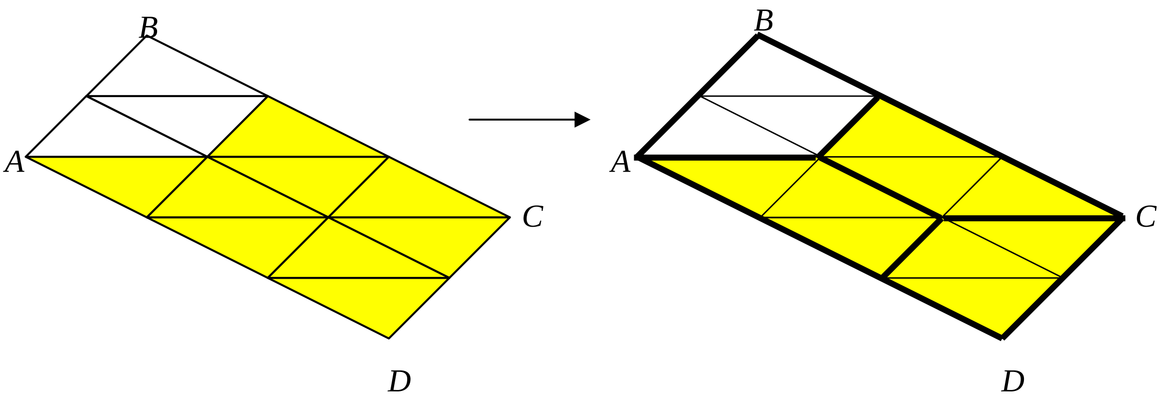
Exemple 7

Quelle fraction du triangle *ABC* est-elle coloriée ?



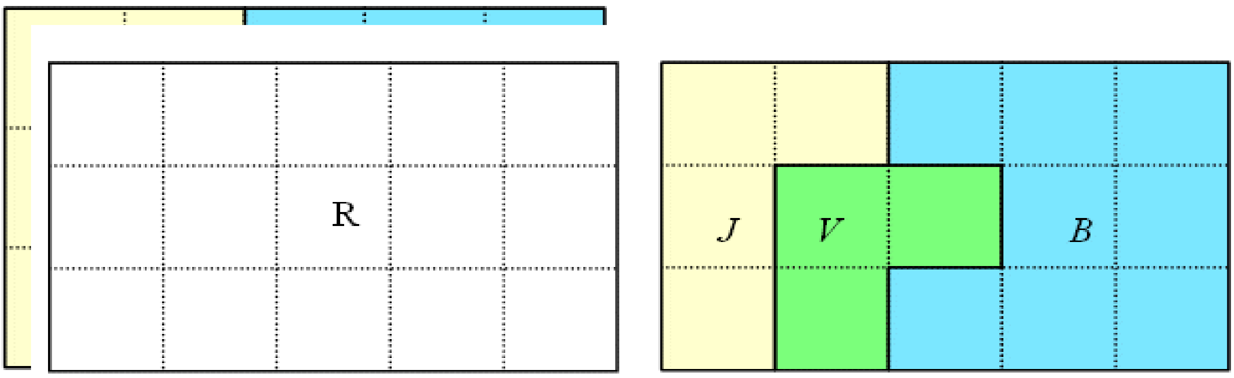
Exemple 8

Quelle fraction du quadrilatère *ABCD* est-elle coloriée ?



Exemple 9

La figure *R* est le rectangle qui a été partagé en 3 parties : jaune J, vert V et bleue B.



1. On prend *R* comme unité. Quelle fraction de cette unité représente *J* ? ____
   Quelle fraction de *R* représente *V* ?

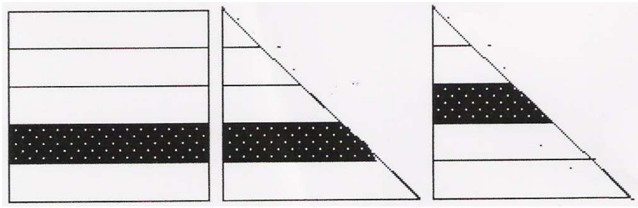
2. On prend *J* comme unité. Quelle fraction de cette unité représente *V* ? ____
   Quelle fraction de *J* représente *B* ?

3. On prend *B* comme unité. Quelle fraction de cette unité représente *J* ? ____
   Quelle fraction de *B* représente le rectangle *R* ?

4. On prend *V* comme unité. Quelle fraction de cette unité représente *J* ? ____
   Quelle fraction de *V* représente *B* ?

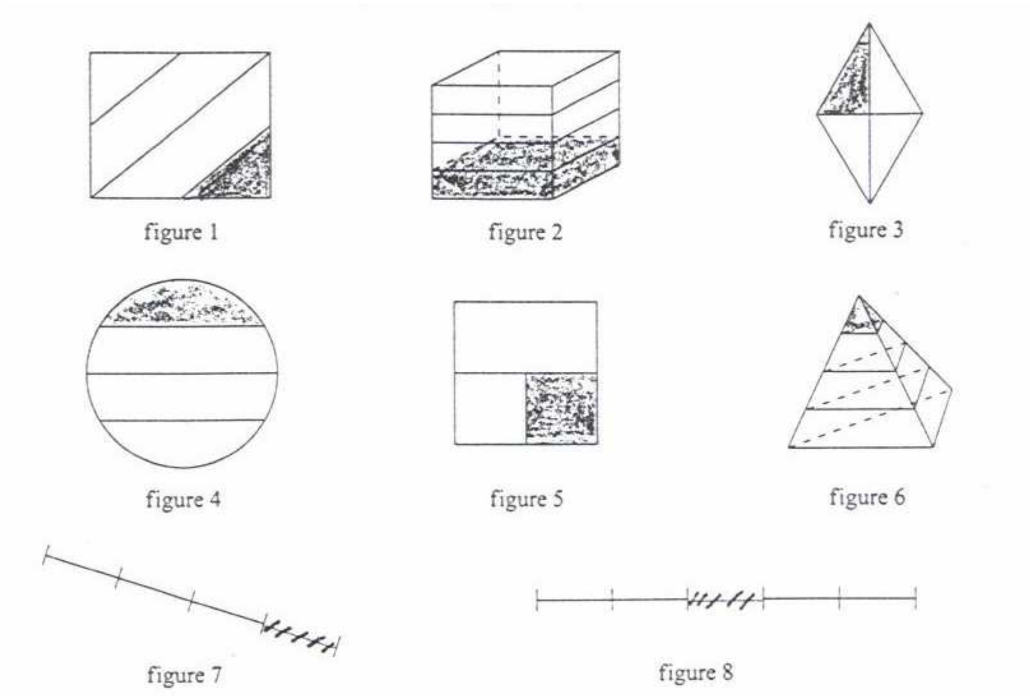
Exemple 10

Dans quel(s) cas la partie colorée représente-t-elle $\frac{1}{5}$ de la figure ? Justifier votre réponse pour chaque cas.



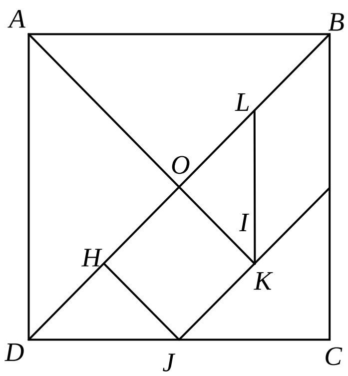
Exemple 11

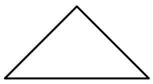
Sur quelles figures a-t-on colorié le quart du segment, de la surface ou du solide ?



Exemple 12

Un TANGRAM est un puzzle chinois tout simple en forme de carré. Il se compose de sept pièces : cinq triangles, un carré et un parallélogramme. Ces pièces peuvent se combiner en une multitude de formes différentes.





Triangle de base

Dans cet exercice, on prend le petit triangle comme unité d'aire.

I) Travail préliminaire.

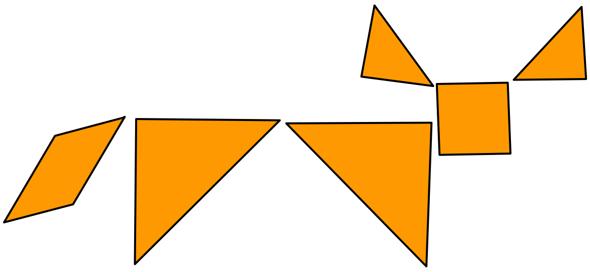
1) Tracer un segment en pointillés qui décompose le carré *OKJH* en deux triangles de base.
2) Procéder de même pour le triangle *IJC* et pour le parallélogramme *LBIK*.
3) Tracer des segments en pointillés pour décomposer le triangle *AOB* en triangles de base.

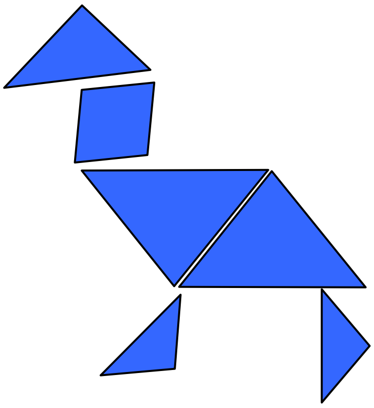
II) Trouver des fractions.

1) Quelle fraction représente le petit triangle par rapport au grand carré *ABCD* ?
2) En déduire la fraction représentée par le triangle *IJC* ?
3) En déduire la fraction représentée par le carré *OKJH* ?
4) En déduire la fraction représentée par le parallélogramme *BIKL* ?
5) En déduire la fraction représentée par le triangle *AOB* ?

III) Calculer.

Examiner chacune des figures suivantes, formées avec certaines pièces du TANGRAM, et en déduire la fraction qu'elle représente par rapport au grand carré.



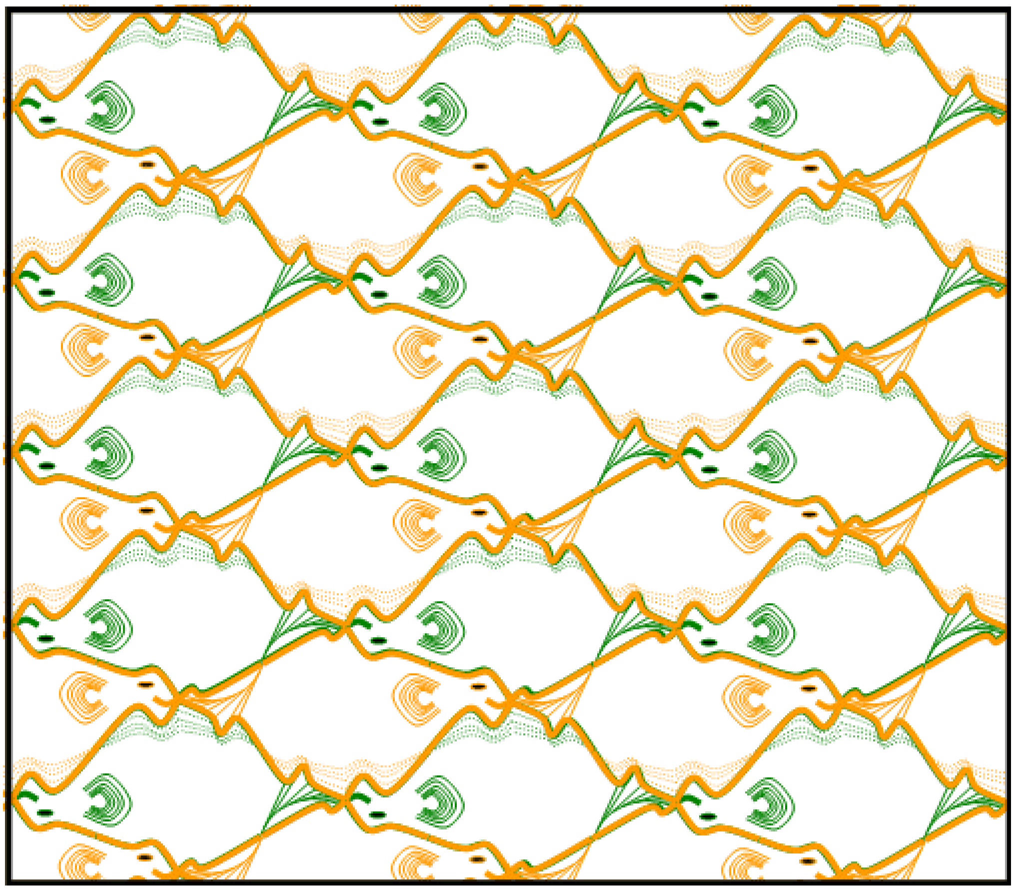


Exemple 13

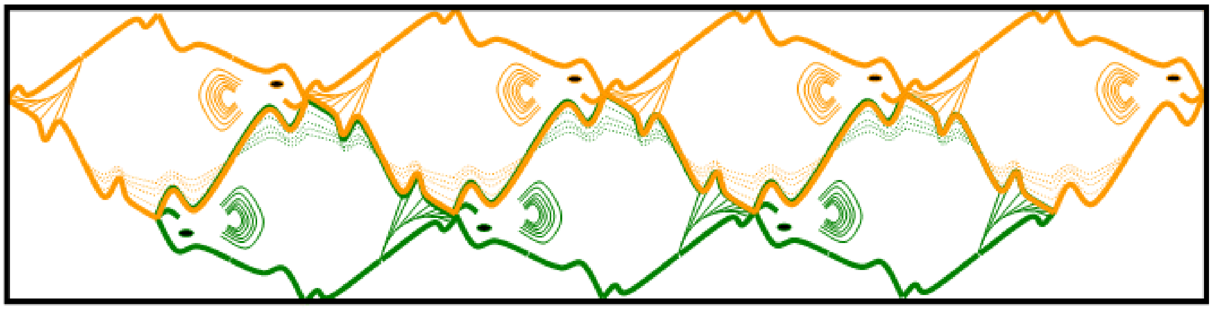
Un motif, en céramique, entre dans la décoration de frises ou de panneaux :

Ce motif offre l'avantage de pouvoir parfaitement s'emboîter avec un motif retourné :

Un panneau rectangulaire est décoré par un pavage de monstres. Trouver la fraction d'aire du rectangle, aire formée par les monstres se dirigeant vers la droite.



Même question avec le rectangle ci-dessous :



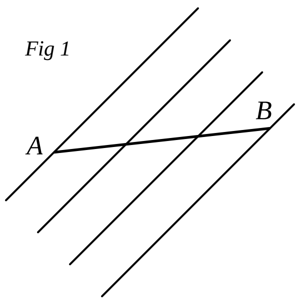
PARTAGES D'UN SEGMENT ET GRADUATIONS

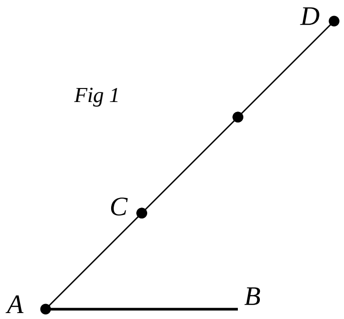
1. « Construire » une fraction

Préoccupons-nous de partager un segment en trois segments de même longueur. Si l'on confie la construction à la mesure et au double-décimètre, on ne peut pas comprendre que $\frac{1}{3}$ est un nombre à part entière. Au contraire, si l'on rejoint la conception des Grecs qui considéraient comme nombre (positif) toute longueur d'un segment pouvant être construit à la règle (non graduée) et au compas à partir d'un segment de référence de longueur unité, le nombre $\frac{1}{3}$ devient un « vrai » nombre. Il ne s'agit pas d'effectuer un retour en arrière de vingt-deux siècles dans l'enseignement, mais d'utiliser la réflexion des anciens pour concevoir des activités permettant de faire accepter que les fractions ne se réduisent pas à une écriture décimale.

Exemple (6ème).

On peut donner dès la classe de Sixième les constructions suivantes, qui permettent de déterminer un segment dont la longueur est égale au tiers de celle du segment [*AB*]. Elles seront justifiées en classe de quatrième.





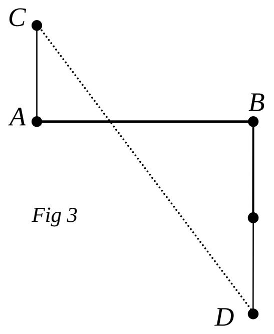


Figure 1 : avec un réseau de parallèles, comme les lignes du cahier.
Figure 2 : on reporte 3 fois une longueur choisie *AC*, puis on trace la parallèle à (*BD*) passant par *C*.
Figure 3 : on trace deux segments [*AC*] et [*BD*] parallèles, tels que $BD = 2\,AC$,
puis on joint *C* et *D* …. C'est le partage « barycentrique ».

Exercices possibles

Construire un segment [*AB*], dont la longueur est l'unité.

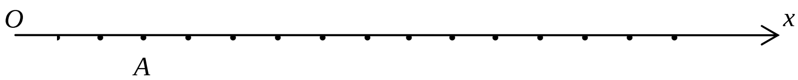
Construire de plusieurs façons des segments de longueurs respectives : $\frac{2}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{7};\frac{3}{7};\frac{16}{7}$, etc.

2. « Placer » une fraction sur un axe

Une activité très simple consiste à associer, lorsque c'est possible, les points d'une demi-droite (6ème) ou d'une droite (5ème), dans laquelle on a choisi un repère, c'est-à-dire un point origine et un autre point unité, à des nombres. Ce repérage installe une vision géométrique des nombres associés à certains points, et de ce fait contribue à les faire accepter comme des nombres à part entière. Il en est ainsi des fractions dès la Sixième, et cette entrée peut être réutilisée en Troisième lorsqu'on évoque les irrationnels. La droite réelle sera en classe de Seconde la bonne façon d'introduire les nombres réels, qui seront présentés comme étant *tous* les nombres associés aux points de la droite.

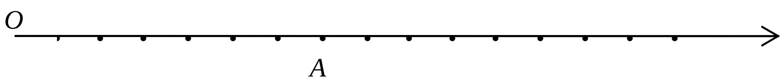
Exercices et activités possibles

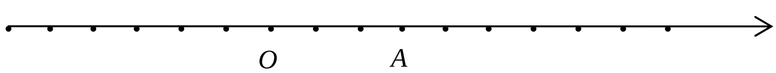
1. La demi-droite (*Ox*) est munie d'une graduation régulière. Le point *A* a pour abscisse 1.



Exprimer l'abscisse des autres points de la figure.

2. Même question avec les figures suivantes :





D – FRACTIONS ET SITUATIONS DE PROPORTIONNALITÉ

Certaines situations de proportionnalité font intervenir des fractions qui ne se réduisent pas à des décimaux. Il importe de présenter de telles situations dans des contextes riches et variés. En voici quelques exemples, qui peuvent être menés sous forme d'un travail dirigé en classe, ou fournir la matière d'un devoir à la maison, quitte à détailler les questions.

Problème 1.
Un VTT a un pédalier comprenant trois plateaux de 22 dents, 25 dents et 28 dents, et une roue arrière à *six vitesses* caractérisées par des pignons de 13, 16, 19, 22, 25 et 28 dents. Chaque tour de pignon fait tourner d'un tour la roue arrière.

1. Lorsque le pédalier fait un tour, avec le plateau de 22 dents, exprimer par une fraction de tour le nombre de tours que fait la roue arrière, avec chacun des six pignons.
2. Même question, avec le plateau de 25 dents, puis avec le plateau de 28 dents.

Problème 2
Une puce saute dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sur un cercle par bonds réguliers : c'est-à-dire que l'angle au centre formé entre deux positions consécutives de la puce est toujours le même. (La mesure de cet angle est un nombre entier de degrés.)
Quel est le nombre minimal de sauts permettant à la puce de revenir à son point de départ ?
Combien de tours la puce aura-t-elle alors effectués ?

Solution : Appelons A la mesure de l'angle du saut. (On rappelle que A est un entier.)
On simplifie, si possible, la fraction $\frac{A}{360}$ pour la rendre irréductible et on obtient le nombre de tours au numérateur et le nombre de sauts au dénominateur.

Exemples : ☞ La puce fait des sauts de 37°:

$\frac{37}{360}\times 360 = 37$. La puce retombe à son point de départ en faisant 37 tours en 360 sauts.

☞ La puce fait des sauts de 65°:
$\frac{65}{360} = \frac{13\times 5}{72\times 5} = \frac{13}{72}$ $\quad \frac{13}{72}\times 72 = 13$. La puce fait 13 tours en 72 sauts.

Problème 3
Dans un magasin anglais on explique aux clients français que 11 kg correspondent à 5 pounds (unité anglaise de masse). Quel est le nombre de pounds contenu dans 1 kg ?

Problème 4
Il faut faire 7 tours de manivelle sur un étau pour rapprocher les mâchoires de 3 cm.

1) Exprimer en fraction de tour le nombre de tours nécessaire pour rapprocher les mâchoires de 1 cm ?
2) De combien de cm se rapprochent les mâchoires quand on fait un tour ?

Problème 5
Avec 49 L de lait on fabrique 3 kg de beurre.
Quelle quantité de lait faut-il pour obtenir 10 kg de beurre ? (Arrondir le résultat au centilitre.)

Problème 6

Je dispose de deux panneaux rectangulaires P_1 et P_2. P_1 mesure 1,30 m de long et 90 cm de large. Quant à P_2, sa longueur est de 1,20 m et sa largeur mesure 1,10 m.

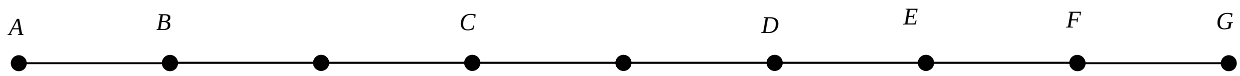
1) Calculer les aires de ces deux panneaux.
2) Compléter : Aire de P_2 = ……. $\times$ aire de P_1.
3) Il faut 70 g de peinture pour peindre une face du panneau P_1. Quelle quantité de peinture faut-t-il pour peindre une face du panneau P_2 ? (Arrondir au décigramme.)

Problème 7

Monsieur DUPONT, propriétaire viticole, possède une parcelle de 1 hectare. Son voisin, Monsieur DURAND a trois fois moins de rangs de vigne dans sa parcelle, mais ses rangs sont deux fois plus longs.

1) Exprimer en fraction d'hectare l'aire de la parcelle de M. DURAND.
2) Monsieur DUPONT fait habituellement les vendanges de cette parcelle en 3 jours avec 6 vendangeurs. Si M. DURAND veut, lui aussi, faire les vendanges de sa parcelle en 3 jours, combien doit-il employer de personnes ?
3) Finalement M. DURAND décide de faire ses vendanges en 1 jour, combien devra-t-il alors employer de personnes ?

Problème 8



Quelle fraction de la longueur du segment [*AE*], les longueurs des segments suivants représentent-elles ?

a) [*AB*]? b) [*BC*]? c) [*AC*]? d) [*DB*]?
e) [*AF*] ? f) [*FC*] ? g) [*BF*] ? h) [*AG*] ?

Quelle fraction de la longueur du segment [*AD*], les longueurs des segments suivants représentent-elles ?

a) [*AB*]? b) [*BC*]? c) [*AC*]? d) [*DB*]?
e) [*AF*]? f) [*FC*]? g) [*BF*]? h) [*AG*]?

Problème 9

Ce sont les vacances de Noël et Amanda veut faire un gâteau. Pour cela, elle utilise les ingrédients de cette recette :

TARTE À LA BANANE ET AU CARAMEL

Pour quatre personnes :

- 45 grammes de beurre fondu
- 75 grammes de biscuits
- 2/5 de litre de lait
- 2 bananes coupées en rondelles
- 1/3 de litre de crème fraîche
- 5/2 cuillères à café de sucre glace
- 1 gousse de vanille

Sophie veut réaliser un gâteau pour douze personnes.

1) Elle dispose d'un quart de kilo de biscuits. Est-ce suffisant ? Si oui, combien de grammes doit-elle laisser de côté ? *(Révision des conversions.)*

2) Pour mesurer les quantités de liquide en litre, Amanda dispose d'un récipient de 1 litre dont les graduations ont pour unité un cinquième de litre.
(Schéma du verre avec les petits traits des graduations tracés)

Comment doit-elle procéder pour utiliser exactement la bonne quantité de crème fraîche et de lait ?

3) Ca y est ! Il est quatre heures. Sophie sort son gâteau du four. Elle le laisse refroidir sur la table mais cela sent bon et son frère Pierre (qui est très gourmand) passe par là et en mange un quart. De combien de personne a-t-il mangé la part ?

4) D'habitude Pierre mange un fruit au goûter. Aujourd'hui, a-t-il mangé autant de fruit que d'habitude ?
Plus précisément, serais-tu capable de donner la fraction de banane qu'il a mangée ?

E – FRACTIONS ET NOMBRES DÉCIMAUX

Il s'agit d'imaginer certaines activités significatives mettant en jeu des quotients d'entiers et certaines écritures décimales égales ou approchées. Tout cela pour faire émerger un questionnement du type : quels quotients sont des décimaux ? Comment se présentent les décimales d'un quotient d'entiers qui n'est pas décimal ? Etc.

Les exemples qui suivent tentent d'aller dans ce sens.

Exercice 1

Les douze premières décimales d'un quotient $\frac{4}{7}$ sont : 0,571428571428

1) Que remarque-t-on ?
2) Que s'est-il passé lors de la division de ces deux entiers ? Vérifier en posant cette division.
3) La division s'arrêtera-t-elle ? Peut-on penser que $\frac{4}{7}$ est un nombre décimal ?

Exercice 2

1) Comment sait-on que la division de 8 par 5 s'arrête ? Le quotient 8/5 est-il un nombre décimal ?
2) Comment sait-on que la division de 25 par 6 ne s'arrête pas ?
   a) Le quotient 25/6 est-il un nombre décimal ?
   b) Que peut-on remarquer sur la succession de ses décimales ? Expliquer.

Exercice 3

1) Parmi ces divisions suivantes, quelles sont celles qui « s'arrêtent » ?

   152 : 5   1 : 8   4 : 13   96 : 16   13 : 4   8 : 11

2) En déduire, parmi les quotients suivants :

   152/5   1/8   4/13   96/16   13/4   8/11 ;

   a) ceux qui sont des nombres entiers ;
   b) ceux qui sont des nombres décimaux non entiers ;
   c) ceux dont certaines décimales vont se répéter indéfiniment.

Exercice 4

1) Lors d'un anniversaire, on partage (de façon équitable) un gros gâteau de 1 kg en 7 parts.
    a) Donner la masse en kilogramme d'une part de gâteau arrondie au gramme près.
    b) Quelle fraction du gâteau représente 5 parts ?
    c) À partir de la masse d'une part calculée précédemment, calculer la masse de 5 parts.

2) Pour calculer la masse des 5 parts, on aurait également pu effectuer 5 : 7.
Quel résultat trouve-t-on ?

3) On constate que les deux réponses sont différentes. Essayer d'expliquer pourquoi.

4) Reprendre le calcul du 1 en poussant la division 1 : 7 plus loin.
Cette division s'arrête-t-elle ? A quoi le voit-on ? Quelle serait la quinzième décimale ?
Pour la masse des 5 parts, retrouve-t-on le résultat du 2 ?

Exercice 5

1) Poser les divisions suivantes :

11 : 3 ; 10 : 24 ; 112 : 16 ; 5 : 17 ; 27 : 4 ; 14 : 11

2) Parmi les quotients suivants, certains sont des nombres entiers, d'autres sont des nombres décimaux non entiers et d'autres ont des décimales qui vont se répéter périodiquement.

11/3 ; 10/24 ; 112/16 ; 5/17 ; 27/4 ; 14/11

Les classer suivant ces trois catégories.
Expliquer rapidement les critères qui permettent d'effectuer ce classement.

Exercice 6

Cet exercice a pour but d'engager la discussion sur le statut de la fraction et la distinction entre statut (proportion ou quantité mesurée) et son écriture décimale (qui existe ou pas).

Dans chacun des cas suivants, calculer la masse de farine utilisée par chaque personne lorsque c'est possible.

a) Olivier a utilisé les $\frac{2}{5}$ d'un paquet de farine d'un kilogramme.
b) Sophie a utilisé les $\frac{3}{4}$ d'un paquet de farine de 500 grammes.
c) Ahmed a utilisé $\frac{2}{5}$ kg de farine.
d) Anita a utilisé $\frac{3}{4}$ d'un paquet de farine.
e) Nadia a utilisé 1,3 kg de farine.
f) Fatou a utilisé $\frac{2}{3}$ d'un paquet de farine d'un kilogramme.

Exercice 7
Cet exercice vise à rappeler le caractère inexact d'une valeur approchée.

Voici un exercice presque entièrement résolu. Lis le, puis réponds à la dernière question.

Pour le repas de Noël de la cantine, l'intendante a décidé d'acheter de très bons gâteaux. Chaque gâteau pèse un kilogramme et le cuisinier décide qu'il peut faire 12 parts dans un gâteau.

a) Calcule la masse d'une part au gramme près.
$1000 \div 12 \approx 83$ grammes.

b) Sachant qu'il y a 600 élèves inscrits à la cantine et qu'ils seront tous là pour le repas de Noël, le cuisinier calcule le poids total de gâteau nécessaire.
$83 \times 600 = 49800$ grammes = 49,8 kg.

Le cuisinier prévoit donc 50 gâteaux d'un kilogramme et s'imagine déjà en train de manger le reste.
Calcule le poids de la part du cuisinier.
$50 \times 1000 - 49800 = 200$.
Le cuisinier pourra donc manger une part double de celles des élèves.

De son côté, l'intendante passe commande. Sachant qu'il faut un gâteau pour 12 élèves, elle calcule ainsi.
$600 \div 12 = 50$.
« Génial » se dit-elle, « cela tombe juste, il n'y aura pas de reste et donc pas de gaspillage ! ».

Alors, qui a raison ? Le cuisinier pourra-t-il goûter au délicieux gâteau ?

Exercice 8
Pour la séquence de calcul $\boxed{\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{=}}$, une calculatrice à dix chiffres affiche $\boxed{.2857142858}$. Admettons que l'égalité $\frac{2}{7} = 0,285\ 714\ 285\ 8$ soit juste.

1. Calculer la valeur exacte de $7 \times 0,285\ 714\ 285\ 8$.
2. En déduire la valeur exacte de $70\ 000\ 000\ 000 \times 0,285\ 714\ 285\ 8$.
3. Comparer avec la valeur exacte de $70\ 000\ 000\ 000 \times \frac{2}{7}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9
Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.
a) Tout nombre décimal peut s'écrire comme le quotient de deux entiers.
b) Tout quotient de deux entiers est un nombre décimal.
c) $0,1875 = \frac{3}{16}$.
d) $5,33 = \frac{16}{3}$.
e) $\frac{5}{13} = 0,384\ 615\ 384\ 615$.

SIXIÈME PARTIE :
Le calcul numérique

A – INTRODUCTION

Le nouveau programme de collège affiche une volonté de recadrer l'activité calculatoire selon trois phases clairement identifiées : le calcul mental, le calcul posé, le calcul instrumenté. Ces trois formes de compétences en calcul doivent être convenablement développées en soi pour devenir mobilisables de façon pertinente dans la résolution de problèmes : pour tel problème, une des trois formes sera la plus efficace, pour tel autre, les trois formes seront utilisées en interaction.

B – LE CALCUL MENTAL

Le calcul mental, qui a pu malheureusement être un peu délaissé pendant plusieurs années dans l'enseignement, présente des mérites reconnus par tous :

a) Sa pratique raisonnable mais régulière structure la pensée, développe la mémoire et la rapidité.
b) Le calcul mental favorise les apprentissages : le calcul « de tête » d'un pourcentage simple, d'une puissance d'exposant raisonnable, …, sont propices à faire comprendre ces notions. Au contraire, l'usage prématuré de la calculatrice dans la phase d'apprentissage d'une notion numérique ne permet pas d'en comprendre la structure calculatoire, et contribue à vider de son sens l'opération effectuée.
c) Le calcul mental prépare le terrain pour l'apprentissage du calcul algébrique : pour un élève qui a l'habitude de calculer mentalement 25×11 ou 7×19, les formules $k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$ prendront un sens accru.
d) Il y a mieux : le calcul mental est un constituant organique du calcul algébrique lui-même. Un simple développement tel que $(2x+9)(-6x+7)$, par exemple, met en œuvre plusieurs procédures mentales (tables de multiplications, règles des signes, procédures de réduction, mémorisation d'un résultat partiel, …) qui, faute d'une certaine automatisation, peuvent conduire à l'échec ou à un calcul erroné. La bonne gestion d'un calcul algébrique repose en grande partie sur la mise en place de ces connexions mentales.

Si dans la vie de tous les jours, l'attitude d'un vendeur qui prend sa calculette pour effectuer une remise de 20 % sur un prix de 60 € nous amuse ou nous agace, nous sommes convaincus de la nécessité d'enseigner le calcul mental à l'école et au collège. La suite propose quelques possibilités, classées par rubriques.

1. Addition et soustraction d'entiers

Exercice 1. Ajouter 90 à un nombre

a) Calculer : 78 + 90 ; 427 + 90 ; 3 025 + 90 ; 5 432 + 90 ; 90 + 2 745.
b) 53 toitures ont été réparées, 90 sont encore endommagées. Combien de maison ont été touchées par la tempête ?
c) Le car faisait un circuit de 232 km. Depuis que le tunnel est fermé, il doit effectuer 90 km de plus. Quelle distance parcourt-il maintenant ?
d) L'exposition avait totalisé 4 750 visiteurs jusqu'à hier soir. 90 visiteurs sont venus aujourd'hui. Combien de personnes ont vu l'exposition ?

Exercice 2
Calculer :
54 + 33 ; 78 + 55 ; 46 + 32 ; 79 + 24 ; 18 + 56 ; 57 + 43.

Exercice 3
a) Quel est le complément à 100 de :
87 ; 56 ; 35 ; 24 ; 62 ; 73 ; 58 ?
b) Combien manque-t-il aux nombres suivants pour atteindre la centaine qui suit ?
98 ; 75 ; 470 ; 389 ; 555 ; 88 ; 260 ; 589 ; 680 ; 776.

Exercice 4. Calculer des différences
a) Quelle différence y a-t-il entre les nombres suivants ?
26 et 46 ; 36 et 47 ; 53 et 70 ; 81 et 100 ; 19 et 40.
b) Calculer :
74 − 9 ; 115 − 9 ; 687 − 9 ; 203 − 9 ; 1 012 − 9 ; 2 113 − 9.
c) La patinoire a enregistré 127 entrées depuis l’ouverture de ce matin. 9 patineurs viennent de partir. Combien de personnes sont maintenant à l’intérieur de la patinoire ?
d) Sur les 180 places de l’auditorium, il n’y a que 9 places vides. Combien de personnes sont maintenant à l’intérieur de la patinoire ?
e) Il reste 9 exemplaires sur les 80 livres qui ont été livrés au libraire. Combien de volumes ont été vendus ?
f) Calculer :
737 − 99 ; 620 − 99 ; 1 134 − 99 ; 2 586 − 999 ; 4 803 − 999.

Exercice 5. Ajouter 9, 11, …

Calcul à faire	**Méthode**	**Exemple**
Pour ajouter 9	On ajoute 10 et on soustrait 1	17+ 9 = 17 + 10 – 1= 27 – 1 = 26
Pour ajouter 11	On ajoute 10 puis on ajoute 1	17 + 11 = 17 + 10 + 1 = 27 + 1 = 28
Pour soustraire 9	On soustrait 10 et on ajoute 1	17 – 9 = 17 – 10 + 1 = 7 + 1 = 8
Pour soustraire 11	On soustrait 10 et on soustrait 1	17 – 11 = 17 – 10 – 1 = 7 – 1 = 6

Calculer en utilisant la méthode ci-dessus :
I. a) 23 + 9 b) 37 + 11 c) 115 + 9 d) 3,2 + 11 e) 58,32 + 9
f) 473,5 + 9
II. a) 24 – 9 b) 91 – 11 c) 203 – 9 d) 15,7 – 9 e) 33,96 – 11
f) 27,5 – 11
III. a) 437 – 101 b) 324 + 99 c) 627 – 99 d) 2024 – 101

Calculer mentalement :
I. a) 25 + 19 b) 104 + 59 c) 104 – 39 d) 532 – 79 e) 279 + 23
f) 128 – 36

II. a) 279 + 23 b) 435 + 39 c) 125 000 + 600 d) 5600 – 700

Exercice 6
a) Calculer : 15 + 8 ; 48 + 7 ; 86 + 8 ; 35 + 6 ;
6,3 + 8 ; 4,7 + 5 ; 49 + 7 ; 6,6 + 0,3 ; 56 + 9.
b) Calculer : 17 – 6 ; 47 – 9 ; 68 – 10 ; 35 – 6 ; 12,1 – 5,1 ;
6,6 – 3,4 ; 4.5 – 0,7 ; 17 – 12.
c) Calculer : 125 + 11 ; 457 + 21 ; 376 + 31 ; 256 – 11 ; 347 – 21 ;
523 – 31 ; 564 + 201 ; 896 – 301 ; 100 – 41.

d) Calculer : 125 + 99 ; 56 + 39 ; 732 + 999 ; 23,4 + 1,9 ; 418 + 79 ;
56 + 1999 ; 89 + 199 ; 25,6 + 4,9 ; 237 + 89.

e) Calculer : 125 – 99 ; 56 – 39 ; 782 – 39 ; 23,4 – 1,9 ; 418 – 79 ;
567 – 199 ; 189 – 109 ; 25,6 – 4,9 ; 237 – 89.

Exercice 7

Combien faut-il ajouter aux nombres suivants afin d'obtenir 500 ?
248 ; 125 ; 426 ; 88 ; 50,2 ; 475,5.

Exercice 8

7 + 4 = 10+ 27 = 25 + 75 = 17 – 8 = 25 – 12 = 136 – 39 =

Quel nombre faut-il ajouter à 13 pour obtenir 20 ?
Quel nombre faut-il ajouter à 48 pour obtenir 100 ?
Quel nombre faut-il soustraire à 42 pour obtenir 15 ?

Exercice 9

Compléter :

Tables de multiplications	Equations	Trouver les facteurs	Calculs astucieux	Distributivités
8 × 7 =	8 × ___ = 72	35 = ___ × ___	5 × 67 × 2 =	7 × 99 =
9 × 9 =	7 × ___ = 63	48 = ___ × ___	4 × 58 × 25 =	13 × 11 =
7 × 6 =	___ × 6 = 54	45 = ___× ___	2 × 47 × 5 × 4 × 25 =	25 × 101 =
5 × 8 =	___ × 4 = 28	32 = ___ × ___	15 × 7 × 2 =	999 × 5 =
8 × 6 =	3 × ___ = 24	49 = ___ × ___	1,25 × 3 × 8 =	9 × 990 =

2. Tables, multiplication d'entiers, de décimaux

Exercice 1. Multiplier un nombre par 5

a) Un écrivain écrit cinq pages par jour. Combien de jours met-il pour écrire un roman de 425 pages ?

b) Il faut cinq pneumatiques pour équiper une voiture neuve. Combien faut-il de pneumatiques pour équiper 25 voitures ?

c) Calculer mentalement : 5 × 65 ; 5 × 36; 5 × 84; 5 × 94;
5 × 68; 5 × 120; 5 × 90.

d) Si 1 CD coûte 5,70 €, combien coûtent 5 CD ?
Même question pour 2,80 € ; 11,40 € ; 9,50 €.

Exercice 2

a) Quel est le double de : 73 ; 96 ; 123 ; 156 ; 183 ; 234 ; 257 ; 298.

b) Calculer : 70 × 6 ; 800 × 4 ; 6 × 80 ; 3 × 400 ;
70 × 50 ; 50 × 900 ; 600 × 50 ;
240 × 20 ; 3 120 × 10 ; 4 565 × 100 ; 56 345 × 100 ; 27 987 × 10.

c) Un producteur s'est engagé à approvisionner une cantine qui a besoin de 85 kg de pommes de terre chaque jour.
Quelle masse de pommes de terre doit-il livrer pour 9 jours ? Pour 90 jours ? Pour 100 jours ?

d) Calculer : 11 × 45 ; 11 × 56 ; 11 × 73 ; 11 × 120 ; 11 × 150 ; 11 × 230.

e) *Pour multiplier un nombre par 15, on multiplie par 10 et on ajoute la moitié :*

Calculer : 15 × 6 ; 15 × 8 ; 15 × 12 ; 15 × 20 ; 15 ×3 ; 15 × 11.

f) Il faut 15 min pour cuire une fournée de gougères. Quel est le temps nécessaire pour faire six fournées ?

g) Un troupeau de chèvres produit chaque jour 12 bidons de 15 litres. Quelle est, en litres, la production journalière de lait ?

Exercice 3

a) Pour multiplier par 5, on multiplie par 10 et on divise par 2 (ou l'inverse).
Pour diviser par 5, on divise par 10 puis on multiplie par 2 (ou l'inverse).
Calculer : 48 × 5 ; 127 × 5 ; 53 ÷ 5 ; 3,1 ÷ 5 …

b) Multiplier par 0,5, c'est prendre la moitié. Diviser par 0,5, c'est multiplier par 2.
Calculer : 86 × 0,5 ; 13,5 × 0,5 ; 58 ÷ 0,5 ; 486 × 0,5 …

Exercice 4

Calculer : 8 × 40 ; 7 × 0,2 ; 9 × 0,5 ; 5 ×20 ; 8 × 0,4.

Exercice 5

12 × 100 = 458 ×10 = 4 × 15 = 25 × 4 = 8 × 125 =
12 ×4 = 11 × 25 = 9 × 13 = 6 × 70 = 7 × 3000 =
Quel nombre multiplié par 5 donne 45 ?
Quel nombre multiplié par 3 donne 27 ?

Exercice 6

0,25 × 4 = 18 × 0,5 = 4 × 0,3 = 2 × 4,8 = 0,025 × 100 =
7,9 × 1 000 = 0,15 × 0,3 = 140 × 0,1 = 43,5 × 0,01 = 400 × 0,02 =

Exercice 7

Compléter

Le double de 7 ,5 est	La moitié de 92 est
Le double de 45,5 est	La moitié de 17 est
La moitié de 86 est	La moitié de 73 est
1h 15min = …………..min	3 h 45 min = …………min

Exercice 8

Calculer

5 × 30 =	52 × 0,2 =
9 × 50 =	4 × 0,07 =
800 × 5 =	51 × 0,0 4 =
90 × 30 =	26 × 0,3 =
60 × 20 =	0,9 × 0,8 =
6 × 900 =	0,06 × 0,9 =

Exercice 9 : multiplier par 2, 3, 4, …, 8 un nombre de deux chiffres

Compléter.

1) $12\times2=$	$14\times3=$	$15\times5=$	$16\times6=$	$21\times7=$
2) $23\times5=$	$17\times6=$	$24\times4=$	$35\times7=$	$13\times8=$
3) $41\times8=$	$53\times4=$	$24\times7=$	$66\times6=$	$72\times7=$
4) $17\times2=$	$31\times8=$	$25\times5=$	$43\times7=$	$61\times3=$

Exercice 10 : multiplier par 9 ou 11

1) $12\times9=$	$37\times9=$	$24\times9=$	$26\times9=$	$51\times9=$
2) $43\times9=$	$76\times9=$	$14\times9=$	$38\times9=$	$85\times9=$
3) $14\times11=$	$22\times11=$	$44\times11=$	$33\times11=$	$77\times11=$
4) $18\times11=$	$66\times11=$	$51\times11=$	$75\times11=$	$99\times11=$

Exercice 11 : multiplier par 99, par 101

1) $2\times99=$	$7\times99=$	$9\times99=$	$6\times99=$	$5\times99=$
2) $3\times99=$	$4\times99=$	$8\times99=$	$12\times99=$	$18\times99=$
3) $12\times101=$	$18\times101=$	$16\times101=$	$14\times101=$	$13\times101=$
4) $27\times101=$	$36\times101=$	$28\times101=$	$45\times101=$	$59\times101=$

3. Addition et soustraction de décimaux

Exercice 1

Combien dois-je payer si j'achète :

- Un ballon à 14,50 € et un maillot à 12,30 € ?
- Un CD à 15,25 € et une cassette à 8,35 € ?
- Trois albums à 6,35 € l'un ?
- Une maquette à 12,40 € et de la peinture à 6,67 € ?

Exercice 2

Calculer ce que l'on rend, si avec 100 €, on paie :

85 € ; 75,50 € ; 78,20 € ; 46,10 € ; 57,43 € .

Exercice 3

Donner le résultat des opérations suivantes sous forme décimale : 3 dixièmes + 7 dixièmes ; 5 centièmes + 4 unités ; 2 centaines + 3 unités ; 12 dizaines + 10 dizaines ; 5 dixièmes + 3 centièmes.

Exercice 4

Combien de dixièmes faut-il ajouter à 0,7 pour obtenir 1 ?
Combien de centièmes faut-il ôter à 1,95 pour obtenir 1,55 ?
Combien de dizaines faut-il enlever à 263 pour obtenir 213 ?

Exercice 5

4 + 8,2 =	2,3 + 2,7 =	4,5 +5,5 =	3,09 +3,01 =
1,75 + 3,25 =	10 – 1,8 =	7,3 – 2,4 =	42 – 19,5 =

Quel nombre faut-il ajouter à 13,9 pour obtenir 16 ?
Quel nombre faut-il soustraire à 23 pour obtenir 16,3 ?

Exercice 6
Compléter :

Additions de décimaux	Calculs astucieux (nombres décimaux)
12,1 + 4,7 =	2,8 + 1,6 =
19,7 – 2 =	3,7 + 6,3 + 2 =
3,7 + 2,5 =	27,8 – 12 =
23,8 + 18,5 =	0,75 + 3,25 =
5,2 – 1,7 =	6,33 + 4,77 =

4. Décomposition d'un entier

Exercice 1
Décomposer en produit de deux facteurs (Exemple $64 = 8 \times 8 = 16 \times 4 = 32 \times 2$) :
81 =   72 =   49 =   65 =   124 =

Exercice 2
Décomposer chaque entier en produit de deux facteurs, de toutes les manières possibles :
45 ; 16 ; 20 ; 30 ; 42 ; 56 ; 49 ; 36 ; 63 ; 54.

5. Multiplier, diviser par une puissance de dix

Exercice 1
Un lot de 100 gommettes coûte 2,4 euros.
Quel est le prix en centimes d'une gommette ?

Exercice 2
On a choisi un nombre, on l'a divisé par 10 puis par 100 et on a finalement trouvé 1,2345.
Quel est ce nombre ?

Exercice 3
a) Déterminer en calculant mentalement :
$26{,}35 \times 10$; $4{,}5 \times 100$; $3{,}2 \times 0{,}1$; $0{,}5 \times 100$; $3000 \times 0{,}01$.

b) À l'aide de regroupements astucieux, calculer :
$4 \times 6 \times 2{,}5$; $895 \times 2 \times 0{,}5$; $4 \times 7{,}89 \times 25$.

Exercice 4
Effectuer :
$1{,}387 \times 0{,}1$; $25{,}8 \times 0{,}01$; $12{,}5 \times 0{,}001$; $3{,}5 \times 0{,}001$;
$0{,}35 \times 0{,}1$; $99{,}999 \times 0{,}01$; $95{,}388 \times 0{,}01$; $351{,}917 \times 0{,}001$;
$29 \times 0{,}1$; $7{,}5 \times 0{,}01$; $1894 \times 0{,}001$.

Exercice 5
1) Calculer
a) $7 \times 1000 =$
b) $8{,}4 \times 100 =$
c) $14{,}25 \times 10 =$
d) $3545 : 1000 =$
e) $7{,}4 : 100 =$
f) $90 : 10 =$

2) Compléter par $\times$ ou :

a) 38,56 ….. 10 = 3,856
a) 1,8 ….. 100 = 180
b) 4 ….. 1000 = 0,004

3) Compléter par le nombre qui convient :

a) 12,56 $\times$ ….. = 1256
b) 0,4 $\times$ ….. = 0,4
c) ….. $\times$ 1000 = 42,5
d) 532,9 : ….. = 0,5329
e) 7 : …… = 0,07
f) ….. : 100 = 500

Exercice 6

1 On sait que 854 $\times$ 26 =22204 ; sans poser d'autre opération, trouve les produits suivants :

a) 85,4 $\times$ 2,6 = b) 0,854 $\times$ 26 =

2. On sait que 35$\times$ 697 =24395; sans poser d'autre opération, trouve les produits suivants :

a) 0,35 $\times$ 6,97 = b) 35 $\times$ 0,697 =

Exercice 7

Effectuer :

a) 4 $\times$ 13,9 $\times$ 25 ; b) 125 $\times$ 7 $\times$ 8 $\times$ 6 ; c) 25 $\times$ 89,3 $\times$ 4 ; d) 8 $\times$ 9 $\times$ 125 $\times$ 6.

Exercice 8

Compléter :

× par 10 ; 100 ou 1 000	**× 0,1 ; 0,01 ou 0,001**	**÷ par 10 ; 100 ou 1 000**
153 × 100 =	76,9 × 0,1 =	413,8 ÷ 10 =
1 000 × 97,5 =	241 × 0,01 =	455 ÷ 1 000 =
0,54 × 10 =	12,567 × 0,001 =	100 ÷ 1 000 =
0,003 × 100 =	0,1 × 0,87 =	10 ÷ 1 00 000 =
5,67 × 1 000 =	0,01 × 5 634 =	0,5 ÷ 10 =

6. Divisions

Exercice 1

Une cuillère à soupe pleine peut contenir 15g de sucre en poudre. Une recette de crème pâtissière demande 90g de sucre. Combien de cuillères à soupe de sucre doit-on utiliser ?

Exercice 2

4,6 : 2 = 23 :2 = 97 : 100 = 0,4 : 10 =
0,45 : 3 = 2,7 : 9 = 8,8 : 8 =

Exercice 3

Compléter :

Divisions d'entiers :	**Divisions d'entiers :**	**Divisions de décimaux :**
28÷2=	27÷9=	24,3÷3=
21÷3=	42÷6=	45,27÷9=
54÷9=	49÷7=	12,6÷2=
99÷3=	54÷6=	63÷2=
93÷3=	54÷9=	9÷2=

7. Ordre de grandeur, contrôle d'un calcul

Exercice 1

a) Compléter par des nombres entiers :

6,197 est proche de ….. et 4,019 est proche de …..

Donc 6,197 × 4,109 est proche de ….. × ….. , donc de ….. .

b) Vérifier avec une calculatrice.

Les résultats sont-ils cohérents ? Pourquoi ?

Exercice 2

Laurence est incollable pour effectuer des multiplications de nombres entiers, mais elle a beaucoup de mal à placer la virgule quand c'est nécessaire ! Aidez Laurence à placer cette virgule dans les cas suivants :

A est proche de	B est proche de	Réponse proposée par Léa pour A × B
30	20	56,89
5	2 000	1 023,456
40	8	3 185,63

Exercice 3

La charge maximale que peut supporter cette remorque est une tonne.

Fabien doit transporter 79 statuettes identiques pesant chacune 9,5 kg.

a) Evaluer un ordre de grandeur de la masse totale des statuettes.

b) Fabien peut-il envisager de transporter ces statuettes dans la remorque en un seul voyage, sans être en surcharge ?

Exercice 4

Pour chacun des produits suivants, trois nombres a, b et c sont proposés.

Sans poser d'opération, choisir le plus proche du résultat exact du produit :

1. produit 24 × 10,5 :
   a = 240 ; b = 2 400 ; c = 34.
2. produit 84 × 1,5 :
   a = 1 000 ; b = 10 ; c = 100.
3. produit 889,4 × 100,5 :
   a = 10 000 ; b = 100 000 ; c = 1 000.

Exercice 5

a) Sans poser les divisions, donner un ordre de grandeur des quotients :

604 : 2 ; 42,36 : 7 ; 9 041 : 9 ; 30,71 : 2.

b) Sans effectuer les calculs exacts, dire si chacun des quotients est plus poche de 1 ; 10 ; 100 ou 1000.

47 : 41 ; 43,1 : 4 ; 3752 : 33 ; 6978 : 7.

Exercice 6

Choisir parmi les nombres suivants celui qui est un ordre de grandeur de 4582 ÷ 99,9

458200 460 46 4,6 0,46

Exercice 7

Un ordre de grandeur de 30 divisé par 9,8 est …

Un ordre de grandeur de 97,8 divisé par 3,9 est …

Un ordre de grandeur de 49,2 divisé par 25 est …

Exercice 8

a) Donner l'ordre de grandeur de 1025×48.

b) Le produit 4208×13 est-il égal à : 5704, 54704 ou 540704 ?

Exercice 9

Entourer chaque fois le bon résultat sans poser d'opération :

a) 59×215 est égal à :	9875	12685	10956	1205
b) $97 \times 38,4$ est égal à :	3822,38	3840	3724,8	36543,8

Exercice 10

Entourer chaque fois le bon résultat sans poser d'opération :

a) 317×68 est égal à :	17496	21455	2176	21556
b) $99 \times 53,8$ est égal à :	5326,2	52525,2	5364,32	5380

Exercice 11

Entourer la bonne réponse sur chaque ligne

1,02 + 2, 054 =	2,02	102,054	3,054	100,9102	3,074
0,235 + 54,2 =	542,2	54,435	5,042	14,235	5420,35
9,851 +100,02 =	109,871	985,10002	900,98	8,9998	10985,1
0,125 + 145,02 =	125,145	145,145	140,502	14,502	1450,145

8. Angles

Exercice 1

a) On trace la bissectrice d'un angle de 82 ° : combien mesure chaque angle obtenu ?
b Combien mesure la moitié d'un angle plat ?
c) Combien mesure le tiers d'un angle droit ?
d) Quel est le triple de 25 ° ?
e) Quelle est la mesure de l'angle qu'il faut ajouter à un angle de 35 ° pour obtenir un angle plat ?

9. Longueurs, périmètres

Exercice 1

- Quel est le périmètre d'un triangle équilatéral de côté :
  a) 3 cm ? b) 8 cm ? c) 15 cm ? d) 25 mm ?
- Quel est le périmètre d'un losange de côté :
  a) 2 cm ? b) 5 cm ? c) 3 dm ? d) 82 mm ?
- Quelle est la longueur des côtés d'un triangle équilatéral dont le périmètre est :
  a)12 cm ? b) 36 cm ? c) 63 m ? d) 120 mm ?
- Quelle est la longueur des côtés d'un losange dont le périmètre est :
  a) 12 cm ? b) 24 cm ? c) 44 m ? d) 100 mm ?
- Quel est le périmètre d'un carré de côté :
  a) 4 cm ? b) 7 cm ? c) 12 cm ? d) 25 mm ?
- Quel est le périmètre de ces rectangles :
  a) $l = 1cm; L = 3cm$ b) $l = 5cm; L = 7cm$
  c) $l = 4dm; L = 11dm$ d) $l = 60mm; L = 13cm$

Exercice 2
Quel est le diamètre d'un cercle de rayon 12 cm ?
Quel est le périmètre d'un carré de côté 2,5 cm ?
Quelle est la longueur du côté d'un triangle équilatéral de 33 cm de périmètre ?
Combien faut-il ajouter à 35 cm pour obtenir 1 m ?
Combien de kg dans 3,5 t ?
Si on ajoute 48 cm et 1,70 m, de combien dépasse-t-on 2 m ?
[AB] mesure 8,4 cm. I est le milieu de [AB]. Combien mesure AI ?
Quel est le périmètre d'un rectangle de longueur 4,5 cm et de largeur 3 cm ?
Un rectangle a pour périmètre 20 cm et pour longueur 6 cm. Quelle est sa largeur ?

Exercice 3

a) Le périmètre d'un triangle équilatéral est 180 m.
Quelle est la longueur de chacun des côtés ?

b) *ABC* est un triangle isocèle en *A*.
Le côté [AB] mesure 6 m et le périmètre du triangle est 20 m .
Quelle est la mesure du côté [BC] ?

10. Aires

Exercice 1
Calculer l'aire de rectangles dont la longueur et la largeur mesurent :
48 m et 25 m ; 1,60 m et 0,5 m ; 26 m et 25 m.

Exercice 2
- Calculer l'aire d'un carré de 6 m de côté.
- Calculer l'aire d'un rectangle dont la longueur est 7 m et la largeur 4 m.

Exercice 3
La largeur d'un rectangle est 6 m. La longueur est le double de sa largeur.
Quelle est son aire ?

Exercice 4
Un terrain carré mesure 100 m de côté. On le partage en quatre parties égales.
Quelle est l'aire de chacune des parties ?

Exercice 5
L'aire d'un rectangle est 72 m ^{2}. Sa largeur mesure 8 m. Quelle est sa longueur ?

Exercice 6
Un rectangle a un périmètre de 11 m et une largeur de 1,5 m. Quelle est son aire ?

11. Volumes

Exercice 1
La longueur totale des arêtes d'un cube est de 48 cm .
Quelle est la longueur de chaque arête ?

Exercice 2
Un pavé droit a pour dimensions 6 cm, 4 cm et 3 cm .
Quelle est la longueur totale des arêtes ?

Exercice 3

Calculer le volume d'un cube dont les arêtes ont pour mesure 4 cm .

Exercice 4

Calculer le volume d'un pavé droit dont les dimensions sont 15 cm, 3cm et 2cm.

Exercice 5

Un bassin de 10 m de long , 4 m de large et 2 m de hauteur est rempli aux trois quarts.
Quel est le volume d'eau ?

12. Conversions d'unités

Exercice 1

a) Convertir en mètres :
1,7 hm ; 3,5 dam ; 42 dm ; 540 dm ; 6 800 cm.
b) Convertir 180 cm en dm ; 12,05 hm en dam.

Exercice 2

1. Convertir en m² : 12 000 cm² ; 154 dm² ; 4,3 ha ; 5 km²
2. Convertir en m^3 : 300 dm^3 ; 3 500 litres …

Exercice 3

8 dm^3 c'est ….. cm^3.
4,5 m^3 c'est ….. dm^3.
700 000 cm^3 c'est ….. m^3.

Exercice 4

Compléter :

73 mm = ….. cm
5 m = ….. cm
3,4 km = ….. m
3276 cm = ….. m
900 m = ….. km

Exercice 5

Conversions de longueurs		**Conversions d'aires**		**Conversions de volumes et capacités**		**Conversions de masses**	
45km =	dm	4 m^2 =	cm^2	425 mL=	L	3 000kg =	T
56cm =	dam	12dm^2 =	m^2	12,3 cm^3 =	dm^3	56 mg =	g
2,7hm =	m	7,3 km^2 =	dam^2	43 dm^3 =	L	12 500g =	kg
75,8 cm =	m	5a =	m^2	0,5 m^3 =	mL	0,065 kg =	g
0,39 mm =	dm	6,2 km^2 =	ha	2 300dm^3 =	m^3	0,35T =	kg

13. Proportionnalité

Exercice 1

Il faut 120g de beurre dans une recette de gâteau prévue pour 6 personnes, combien faut-il de beurre pour réaliser ce même gâteau pour 9 personnes ?

Exercice 2

a) Un randonneur parcourt environ 5km par heure, quelle distance parcourt-il en deux heures et demie ?
b) Si la masse de 7 balles est de 200 grammes, alors quelle est la masse de 21 balles ?

Exercice 3

6 stylos coûtent 9 euros.
Quel est le prix de 18 stylos ? Quel est le prix de 3 stylos ? Quel est le prix de 21 stylos ?

Exercice 4

Emilie garde des enfants et elle est payée 8 euros de l'heure.
Elle a gagné 40 euros. Combien d'heures a-t-elle travaillé ?
Elle a gagné 4 euros. Combien d'heures a-t-elle travaillé ?
Elle a gagné 12 euros. Combien d'heures a-t-elle travaillé ?

Exercice 5

a) Le prix de 2 kg d'oranges est 4,20 €. Quel est le prix de 10 kg ?
b) Le prix de 20 kg de pommes est 36 €. Quel est le prix de 5 kg ?

Exercice 6

Sur un plan au $\frac{1}{300}$ la distance entre deux points A et B est de 5 cm.
Quelle est la distance réelle ?

Exercice 7

Pour parcourir 100 km il faut 7 L de carburant.
Quelle quantité faut-il pour parcourir : 300 km ? 150 km ? 450 km ?

Exercice 8

a) 12 mètres de tissu coûtent 16 €. Quel est le prix de 3 mètres ? De 15 mètres ?
b) Sur un plan, 1 km est représenté par 4 cm.
   A quelle distance sur le plan seront représentées deux villes distantes de 12 km ? De 2,5 km ?
   Quelle est la distance réelle entre deux villes distantes de 20 cm, de 14 cm sur le plan ?

Exercice 9

1) 6 stylos coûtent 9 €. Quel est le prix de 18 stylos ? De 3 stylos ? De 21 stylos ?
2) Emilie garde des enfants et elle est payée 8 € de l'heure.
   a) Elle a gagné 40 €. Combien d'heures a-t-elle travaillé ?
   b) Elle a gagné 4 €. Combien d'heures a-t-elle travaillé ?
   c) Elle a gagné 12 €. Combien d'heures a-t-elle travaillé ?

14. Pourcentages

Exercice 1. Calculer :

20 % de 36 ; 75 % de 80 ; 50 % de 126 ;
10 % de 5,4 ; 200 % de 32 ; 1% de 16.
Combien valent 25% de 120 ? Combien valent 50% de 98 ?

Exercice 2

a) Calculer mentalement les pourcentages suivants :
20% de 140 ; 50% de 140 ; 10% de 140 ; 60% de 140 ; 110% de 140 ; 150% de 140.
b) Calculer mentalement les pourcentages suivants :
50% de 520 ; 25% de 520 ; 75% de 520 ; 125% de 520.
c) Calculer 25% de chacun des nombres suivants : 130 ; 702 ; 30 ; 25.

Exercice 3

Compléter les phrases suivantes :
12 crayons sur 24 représentent ….. % des crayons.
34 points sur 100 représentent ….. % des points.

Exercice 4

Quelle fraction représente chacun des pourcentages suivants (plusieurs réponses possibles) ?
10% ; 250% ; 50% ; 5%.

Exercice 5

Quel pourcentage peut-on associer à chacune des fractions suivantes ?
$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$.

Exercice 6

Combien font les 5% de 300 ? Combien font les 10% de 42 ?
Combien font les 25¨% de 80 ? Combien font les 50% de 13 ?
Combien font les 8% de 40 ? Combien font les 2/3 de 12 ?
Combien font les 200% de 60 ?

Exercice 7

Calculer :
25% de 80 ; 30 % de 120 ; 40 % de 240 ; 75 % de 250 ; 5 % de 160.

Exercice 8

a) Calculer les $\frac{2}{3}$ de 24, les $\frac{7}{5}$ de 20…
b) Compléter : prendre 70 % d’un nombre c’est le multiplier par …..
c) Compléter : $\frac{3}{4}$ d’un nombre, c’est ….. % de ce nombre.
d) Calculer : 50 % de 70, 34 % de 200, 80 % de 500, 20 % de 40.

Exercice 9
Calculer 10% de 300 ; 25% de 60 ; 75% de 80 ; 100% de 125 ; 150% de 70.

Exercice 10
1) Quelle fraction représente chacun des pourcentages suivants (plusieurs réponses possibles) :
10 % ; 50 % ; 250 % ; 5 % ?
2) Quel pourcentage peut-on associer à chacune des fractions suivantes :
$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$?

15. Fraction d’un nombre

Exercice 1. Calculer le quart d’un nombre
a) Quel est le quart des nombres suivants :
36 ; 84 ; 100 ; 240 ; 300 ; 320 ; 280 ?
b) En une heure, une machine fabrique 68 paires de chaussures.
Combien en fabrique-t-elle en un quart d’heure ?
c) Un litre d’eau de source est vendu 0,96 €.
Quelle est la valeur d’un quart de litre ?
d) Une course est longue de 124 km.
Quelle distance ont parcourue les coureurs qui ont fait un quart de l’épreuve ?
e) Une course de 4 × 100 m à quatre relayeurs dure 48 s.
Quel est le temps de course d’un coureur ?
f) Une pièce de théâtre en quatre actes dure 1 h 40 min.
Quelle est la durée moyenne d’un acte ?

Exercice 2. Calculer le cinquième d’un nombre
a) Quel est le cinquième des nombres suivants :
20 ; 100 ; 430 ; 135 ; 325.
b) Cinq frères se partagent équitablement 5 800 €.
Quelle est la part de chacun ?
c) Autrefois, un sou valait 5 centimes.
Combien de sous y avait-il dans 175 centimes ?

Exercice 3. Multiplier par $\frac{1}{2}$, par $\frac{1}{3}$
a) Calculer :
$\frac{1}{2}\times 40$; $\frac{1}{2}\times 36$; $\frac{1}{2}\times 68$; $\frac{1}{2}\times 74$.

$\frac{1}{3}\times 36$; $\frac{1}{3}\times 99$; $\frac{1}{3}\times 54$; $\frac{1}{3}\times 66$; $\frac{1}{3}\times 84$.
b) Un jerrican de 32 L est à moitié plein.
Combien de liquide contient-il ?
c) Une tomme de Savoie pèse 18 hg.
Combien pèse la demi tomme en grammes ?
d) Le trajet aller-retour d’Orléans à Paris est de 284 km.
Quelle est la distance d’Orléans à Paris ?
e) Une course cycliste fait 312 km. Les coureurs se ravitaillent à mi parcours.
A quelle distance du départ doit-on installer le point de ravitaillement ?

Exercice 4
Calculer 6,4 ÷ 32.
Calculer le tiers de 6,15. Calculer le dixième de 24.

Exercice 5

a) Calculer $77\times\frac{4}{7}$.

b) Quelle est l'écriture décimale de $2{,}1\times\frac{2}{3}$.

c) Combien valent les cinq sixièmes de 30 ?
d) Combien valent les trois quarts de vingt-huit ?

e) Quel est le nombre entier égal à $\frac{3}{6}\times 8664$?

Exercice 6
Pour tricoter un pull à Victor, son père utilise 24 pelotes de laine. Un quart de ces pelotes sont bleues, un sixième sont vertes, la moitié sont blanches et le reste est rouge. Calculer de tête le nombre de pelotes de chaque couleur puis donner la fraction de rouge dans ce pull.

Exercice 7
Calculer : $\frac{2}{5}$ de 40 euros ; $\frac{2}{3}$ de 30 L ; $\frac{7}{10}$ de 500g ; $\frac{4}{7}$ de 140 cm.

Exercice 8
La terre augmente du cinquième de son volume quand elle est remuée. Quel volume de terre remuée obtiendra-t-on avec 15 m^3 de terre en place ? 45 m^3 ?

Exercice 9
a) Paul a 20 billes. Il joue et perd un quart de ses billes.
Combien de billes a-t-il perdu ?
b) Mon livre a 200 pages. J'ai lu les trois quarts de mon livre.
Combien de pages ai-je lues ?
c) Un enfant a reçu 45 euros pour son anniversaire. Il en a dépensé les deux cinquièmes.
Combien d'argent a-t-il dépensé ?
d) Pour aller à l'école, je dois faire 1800 m. j'ai déjà parcouru les deux tiers de cette distance.
Que me reste-t-il à faire ?

Exercice 10
Calculer :
a) Le tiers de 120 €.
b) Le quart de 60 minutes.
c) Un cinquième de 35 kg.
d) Un dixième de 200 L.
e) La moitié de 19 points.
f) Trois cinquièmes de 20 km.
g) Quatre dixièmes de 120 °.
h) Les deux tiers de 33.
i) $6\times\frac{2}{3}$ j) $\frac{1}{5}\times 40$ k) $8\times\frac{4}{3}$ l) $8\times\frac{15}{8}$.

Exercice 11

a) Trouver le nombre manquant dans l'égalité: $3 \times ..... = 10$, $6 \times ..... = 23$.

b) Encadrer la fraction $\frac{12}{5}$, $\frac{78}{10}$ … par deux entiers consécutifs.

c) Ecrire la fraction $\frac{48}{10}$, $\frac{23}{4}$ … comme la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

d) Quelle est la fraction égale à $\frac{12}{7}$ dont le dénominateur est 21.

e) Donner une fraction égale à $\frac{28}{8}$ dont le numérateur est plus petit que 10.

Exercice 12

Calculer mentalement :

$\frac{125}{10}\times100$; $\frac{4}{7}\times42$; $28\times\frac{3}{7}$; $24\times\frac{5}{6}$; $63\times\frac{2}{9}$; $300\times\frac{12}{100}$; $\frac{7}{6}\times54$

$\frac{2}{5}$ de 50 € ; $\frac{2}{3}$ de 30 litres ; $\frac{9}{10}$ de 500 g ; $\frac{3}{7}$ de 140 mm ;

16. Fractions (simplification)

Exercice 1

Calculer les nombres suivants :

$\frac{136}{10}\times100$; $\frac{5}{9}\times72$; $\frac{7}{6}\times54$; $\frac{9}{7}\times28$; $\frac{5}{6}\times42$; $\frac{2}{9}\times63$; $\frac{5}{9}\times81$; $\frac{2}{10}\times500$

Exercice 2

Simplifier les fractions suivantes : $\frac{14}{35}$; $\frac{54}{81}$; $\frac{64}{72}$; $\frac{56}{21}$.

Exercice 3

Ecrire la fraction irréductible égale à : $\frac{4}{30}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{35}{20}$; $\frac{9}{27}$; $\frac{30}{6}$.

Exercice 4

Simplifier : $\frac{24}{28}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{27}{81}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{42}{49}$.

Exercice 5

Simplifier les fractions suivantes :

$\frac{2}{6}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{9}{6}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{24}{16}$; $\frac{42}{49}$; $\frac{63}{81}$; $\frac{14}{2}$; $\frac{3}{12}$

17. Fractions décimales

Exercice 1

Donner une écriture fractionnaire des nombres suivants :

0,1 ; 152,6 ; 3,7 ; 12,17 ; 4,03.

Exercice 2
Donner la forme décimale des nombres suivants :
$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{25}{2}$; $\frac{30}{10}$; $\frac{40}{80}$; $\frac{150}{100}$.

Exercice 3
Donner une écriture fractionnaire de 75%.
Donner l'écriture décimale puis une écriture fractionnaire de $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$.
Donner une écriture fractionnaire de 1,256.
Donner l'écriture décimale de $\frac{3}{100}$.

Exercice 4
Donner l'écriture décimale réduite des nombres suivants :
$45+\frac{8}{100}$; $13+\frac{9}{100}+\frac{7}{10}$; $68+\frac{95}{100}$; $1+\frac{1}{1000}+\frac{7}{10}$

Exercice 5
Ecrire les nombres suivants sous forme de fractions décimales :
1,02 ; 36,7 ; 0,02 ; 8,23 ; 56,032 ; 60,803.

Exercice 6
1) Donner l'écriture décimale de : $\frac{5}{100}$; $\frac{39}{10}$; $\frac{480}{100}$; $2+\frac{7}{100}$; $43+\frac{12}{1000}$
2) Donner une fraction décimale égale à :
0,2 ; 9,77 ; 0,015 ; 30,001 ; 238,6.

Exercice 7
a) Ecrire la fraction irréductible égale à : 0,5 ; 2,3 ; 0,002 ; 1,6 ; 0,25 …
b) Donner la valeur décimale de :
$\frac{1}{10}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{54}{10}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{25}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{73}{1000}$

18. Division euclidienne, arithmétique

Exercice 1
Déterminer mentalement le quotient et le reste des divisions euclidiennes de :
a) 24 par 3 ; b) 37 par 4 ; c) 18 par 6 ;
d) 74 par 10 ; e) 483 par 10 ; f) 94 par 11.

Exercice 2
Achat groupé de rapporteurs : 1 euro l'unité et un rapporteur est offert pour 10 rapporteurs commandés.
La classe compte 26 élèves, combien de rapporteurs faut-il commander ?
(Il ne doit pas y avoir de rapporteurs en plus).

Exercice 3
Calculer le quotient entier et le reste de 100 ÷ 8.
Calculer le quotient entier, puis le quotient décimal de 45 ÷ 4.
Donner un quotient décimal approché de 10 ÷ 3

Exercice 4
Tom répartit équitablement 113 autocollants dans 4 sachets. Combien en reste-t-il ?

Exercice 5
Donner le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes sans les poser :
10 par 4 ; 24 par 7 ; 76 par9 ; 101 par 2.

Exercice 6
21 est-il un multiple de 2 ? de 3 ? de 4 ?
36 est-il un multiple de 2 ? de 4 ? de 8 ?
6 est-il un diviseur de 42 ? de 54 ? de 56 ?

Exercice 7
Trouver deux diviseurs différents de 1 :
De 72 ; de 48 ; de 35 ; de 56 ; de 63 ; de 33.

Exercice 8
$32 \div 4 =$ $35 \div 5 =$ $810 \div 10 =$ 3 millions $\div$ 1 000 =
Dans 36, combien de fois 4 ?
Dans 48, combien de fois 8 ?
Dans la division euclidienne de 15 par 4, le quotient est ?
Dans la division euclidienne de 15 par 4, le reste est ?
Dans la division euclidienne de 48 par 10, le quotient est ?
Dans la division euclidienne de 48 par 10, le reste est ?

19. Durées, cinématique

Exercice 1
En imaginant qu'il faut 5 minutes par exercice, combien faut-il de temps (en minutes) pour faire 81 exercices ?
Donner la réponse en heures et minutes.

Exercice 2
Convertir 90 minutes en heures et minutes puis en nombre décimal d'heures.
Convertir 257 minutes en heures et minutes.

Exercice 3
Calculer la distance parcourue en 30 minutes, si la vitesse moyenne est 7 km/h, 32 km/h, 25 km/h, 64 km/h, 450 km/h.

Exercice 4
Un cycliste roule à la vitesse de 32 km/h. Quelle distance a-t-il parcourue en 15 minutes ? en 45 minutes ?

Exercice 5
Calculer la distance parcourue en 12 minutes si la vitesse est : 20 km/h , 17 km/h , 65 km/h , 92 km/h , 480 km/h , 360 km/h.

Exercice 6
Un cycliste fait 21 km à l'heure. Quelle est la distance parcourue en 6 minutes ? en 12 minutes ? en 24 minutes ? en 48 minutes .

Exercice 7
a) Convertir 240 min en h, 130 min en h et min.
b) Convertir 3 h 10 min en min, 2 min 50 s en s.
c) Un spectacle commence à 20 h 30 min et se termine à 21 h 45 min.
Combien de temps a-t-il duré ?
d) Un train part à 9 h 30 min. Le trajet dure 40 min. A quelle heure arrive-t-il ?

Exercice 8
Compléter le tableau :

Durées : conversions	**Sommes et différences de durées**
1h15min = min	2h15min + 3h30min = h min
306min = h min	4h45min – 1h15min = h min
2h49min = min	5h45min + 2h15min = h min
136s = min s	3h30min – 1h45min = h min
7 268s = h min s	4h49min + 3h27min = h min

C – LE CALCUL POSÉ

Certains calculs dont la gestion mentale est plus délicate ne doivent pas être systématiquement confiés à la calculatrice, surtout dans la phase d'apprentissage. Les items suivants font partie des compétences exigibles.

1. Poser une division et déterminer une valeur décimale approchée

Exemple : calculer la valeur approchée par défaut à trois décimales de $\frac{25}{11}$, de $\frac{58}{2,3}$.

2. Effectuer certaines simplifications de fractions, certains calculs fractionnaires

Exemple : simplifier et mettre sous forme irréductible : $6\times\frac{7}{3}$, $\frac{5}{14}\times 7$ et $\frac{55}{6}\times\frac{3}{11}$.

3. Décomposer un entier de toutes les façons

Exemple : dresser la liste de tous les diviseurs positifs de 45, de 27, de 20, de 75, etc.

4. Effectuer une division euclidienne

Exemple : déterminer le quotient, le reste de la division de 145 par 13, de 200 par 13, etc.

5. Etc. La liste n'est pas limitative.

D – LA CALCULATRICE ET L'ORDINATEUR

La calculatrice ou le tableur sont des instruments de calcul incomparables. Leur usage ne doit cependant pas devenir exclusif ni systématique, mais raisonné. L'enseignant devrait prendre en compte les éléments suivants :

- si la calculatrice est utile dans bien des situations, elle s'avère nuisible pendant la phase d'apprentissage d'une notion. La compréhension d'un calcul numérique passe par un stade d'appropriation mentale des procédures de ce calcul, sans laquelle rien n'est vraiment compris. En conséquence, il est recommandé d'interdire la calculatrice en début d'apprentissage d'une nouvelle notion.

- l'usage de la calculatrice et du tableur demande un apprentissage spécifique (pour organiser un calcul, utiliser un algorithme, lire un résultat) ;

- ces instruments ne connaissent que des nombres décimaux (et qu'un nombre fini de décimaux distincts, dépendant du nombre de chiffres affichés) et ne calculent qu'avec ces nombres, même lorsqu'ils affichent des résultats fractionnaires ;

- la calculatrice n'a pas tout à fait les mêmes procédures de calcul que celles enseignées en mathématiques. En particulier, l'addition n'y est pas toujours commutative ! (Voir à ce sujet l'exemple 7, ci-après.)

- les élèves n'utilisent pas spontanément toutes leurs possibilités, et n'ont pas conscience de leurs limites ;

- le credo de la plupart des gens – et *a fortiori* des élèves – réside dans l'infaillibilité de la machine. Aussi, un des enjeux les plus délicats sera de convaincre que $\pi \neq 3{,}1416$ ou que $\frac{2}{7} \neq 0{,}285\,714\,2858$. Cet objectif est d'autant plus difficile à atteindre qu'il n'est généralement visé que par les seuls mathématiciens ; pourtant les historiens des sciences appliquées savent bien que la mission Apollo 13 a échoué à cause d'arrondis exagérés dans les calculs, et que la météo ne parviendra jamais à prévoir le temps à long terme à cause d'une hypersensibilité aux lointaines décimales des conditions initiales. C'est parce que certains nombres ne peuvent se réduire à une quelconque approximation décimale qu'il est essentiel de faire percevoir $\frac{2}{7}$ ou π comme des nombres à part entière.

Pour prendre en compte ces éléments de réflexion dans notre enseignement, nous allons détailler trois points particuliers pouvant faire l'objet d'un apprentissage avec les élèves, dès la classe de Sixième.

1. Enseigner la lecture de l'affichage

Exemple 1

1. En mode « 2 décimales fixes », le résultat d'un calcul s'affiche : $\boxed{5.17}$.
   Quelle est la bonne interprétation :
   a) 5,17 ≤ résultat < 5,18 ; b) résultat = 5,17 ; c) 5,165 ≤ résultat < 5,175 ?

2. Interpréter les affichages suivants pour un résultat :
   a) $\boxed{3.141}$, en mode « 3 décimales fixes » ;
   b) $\boxed{.159\ 435\ 06}$, pour une calculatrice affichant 8 décimales ;
   c) $\boxed{2.39}$, pour une calculatrice affichant 8 décimales.

Exemple 2

1. Pour le résultat d'un calcul, une calculatrice à dix chiffres affiche : 17.
   Pourquoi serait-il erroné de conclure que le résultat est « exact » ?
2. Pour le résultat d'un calcul, une calculatrice à dix chiffres affiche : 17, 453 564 21.
   Pourquoi serait-il erroné de conclure que le résultat est approché ?

2. Montrer les possibilités de la calculatrice

Exemple 3 : chiffres cachés, chiffres affichés
Avec une calculette affichant 8 chiffres, taper la séquence :

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{-}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$

Un certain nombre de chiffres cachés apparaissent…

Exemple 4 : utiliser la (ou les) mémoire(s)

Il est facile d'imaginer des situations faisant intervenir un (ou des) nombre(s) mémorisé(s).

Exemple 5 : utiliser les « facteurs constants

Sur une calculette ordinaire pour le collège :

a) utiliser le « facteur constant » additif pour obtenir la liste des premiers multiples de 13, 17 ;
b) utiliser le facteur constant multiplicatif pour remplir un tableau de proportionnalité dont on connaît la première ligne.

Exemple 6 : explorer les possibilités de mener des calculs arithmétiques
Certaines calculatrices de type « Collège » sont relativement perfectionnées et peuvent conduire certains calculs, comme déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne, effectuer des calculs avec un affichage fractionnaire, etc. Tout cela peut être montré à l'élève.

3. Faire percevoir les limites de la calculatrice

Exemple 7 : les différences évanescentes
Comparer les résultats affichés de 1 + 0,000 000 000 6 – 1 et de 1 – 1 + 0,000 000 000 6. Que s'est-il passé ?
(Cet exemple montre bien que, dans certains cas, l'addition n'est pas commutative et associative pour les outils de calcul.)

Exemple 8 : les répercussions d'erreurs d'arrondi
Comparer le résultat du calcul $\frac{2}{3}\times 6\ 000\ 000\ 000 - 4\ 000\ 000\ 000$ avec le résultat du calcul exact effectué par écrit.
(Avec une calculatrice affichant dix chiffres, le résultat affiché peut ne pas être nul, comme il le devrait.)

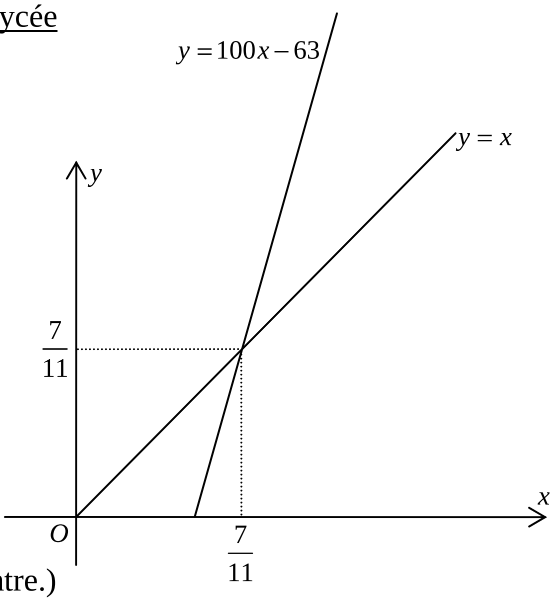
Exemple 9 : l'affichage des « entiers longs »
Calculer l'expression $1\ 234\ 567^{2} - 1\ 234\ 568 \times 1\ 234\ 566$ avec des modèles différents de calculettes à 10 chiffres. Alors ?
(Le résultat exact est 1, ce qui est immédiat en posant $a = 1\ 234\ 567$. Ici, le calcul affiché est erroné car les « entiers longs », c'est-à-dire les entiers ayant un nombre de chiffres significatifs supérieurs au nombre de chiffres pris en compte par la calculatrice, sont arrondis.

Exemple 10 : illustration d'un effet de seuil au niveau du lycée

À partir du nombre 7/11,

- multiplier le résultat par 100 puis soustraire 63 ;
- recommencer un grand nombre de fois.

Que se passe-t-il ?



Réponse, et paradoxe :

Selon la calculatrice, les résultats divergent soit vers +∞, soit vers - ∞.

Pourtant, les valeurs observées sont les termes successifs de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{7}{11} \\ u_{n+1} = 100u_n - 63 \end{cases}$

et il est facile de montrer que cette suite est constante : chaque terme est égal à $\frac{7}{11}$! (Voir la représentation ci-contre.)

Explication :

Pour la plupart des calculatrices scientifiques graphiques, le nombre total de chiffres pris en compte dans les calculs (chiffres affichés plus chiffres cachés) est soit 14, soit 15.

Comme $\frac{7}{11} = 0,63636363.....$:

- pour les premières calculatrices tout est calculé avec l'arrondi décimal
- 0, 636 363 636 363 64, qui est une valeur approchée par excès (d'où la divergence vers $+\infty$) ;
- pour les autres, tout est calculé avec l'arrondi décimal 0, 636 363 636 363 636, qui est une valeur approchée par défaut. Là, on constate la divergence vers $-\infty$.