Exercices autour de la prise de décision

Exercice 1 – Publicité mensongère
Pendante une journée promotionnelle, chaque client d'un magasin reçoit par tranche de 20 euros d'achats, un ticket de jeu qu'il doit insérer dans une urne électronique en sortant. Cette dernière lui dit s'il a gagné ou perdu. Le magasin annonce qu'un ticket sur dix est gagnant. Pour vérifier cette affirmation une association de consommateurs a, tout au long de la journée, récupéré au hasard 100 tickets.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence liée à la variable aléatoire qui compte les tickets gagnants dans un échantillon de 100 tickets.
2. L'association de consommateurs a constaté que, parmi les 100 tickets collectés, 5 étaient gagnants. Que peut-elle décider ?
3. La journée promotionnelle suivante, le magasin renouvelle la même opération en annonçant toujours qu'un ticket sur dix est gagnant. L'association décide de renouveler son opération de vérification, mais souhaite augmenter le nombre de tickets collectés de manière qu'une fréquence observée de 5 % permette d'affirmer que la publicité est mensongère au seuil de 95 %.
   Déterminer une taille d'échantillon collecté permettant cela, en utilisant l'intervalle de fluctuation asymptotique.
4. L'association a collecté au hasard un échantillon de 200 billets parmi lesquels il y a 11 billets gagnants. Que peut annoncer l'association ?

Exercice 2 – Naissances prématurées (document ressource terminale)
Les enfants sont dits prématurés lorsque la durée gestationnelle est inférieure ou égale à 259 jours. La proportion de ces naissances est de 6 %. Des chercheurs suggèrent que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles d'avoir un enfant prématuré que les autres. Il est décidé de réaliser une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de 400 naissances correspondant à des femmes ayant eu pendant leur grossesse un travail pénible.
Les chercheurs décident *a priori* que si la proportion d'enfants nés prématurés dans cet échantillon est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 alors leur hypothèse sera acceptée.

Finalement le nombre d'enfants prématurés est de 50. Quelle est donc la conclusion ?

Exercice 3 – Crises d'asthme (document ressource terminale)
On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français, le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13 %.
Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de cette ville, âgés de 11 à 14 ans, ayant déjà eu des crises d'asthme.
Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.
La règle de décision qui est prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée dans la ville.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes de la ville a permis de dénombrer 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que peut-on en conclure ?

3. Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus de jeunes ayant eu des crises d'asthme dans la ville que dans le reste du département.
   Combien faudrait-il prendre de sujets pour qu'une proportion observée de 19 % soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?
4. Représenter graphiquement la taille de l'échantillon nécessaire en fonction de la valeur p_{sup} de la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Exercice 4 – Surréservation (d'après document ressource terminale)
Dans les vols aériens, certains passagers ayant pris leur place se désistent parfois avant d'embarquer sans acquitter leur place, qui se retrouve vide au cours du vol. Pour compenser le manque à gagner, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre n de réservations supérieur à 300. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.
On considère que les désistements des passagers sont mutuellement indépendants et on évalue la probabilité de désistement de chacun d'eux à 0,1.
On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné.
On note S_n la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement pour ce vol.

1. Dans un premier temps, la compagnie décide de vendre 320 billets.
   Déterminer la probabilité qu'il se présente exactement 300 passagers, puis celle qu'il se présente un nombre de passagers inférieur ou égal à 300.

2. La compagnie veut augmenter le nombre de billets vendus tout en maîtrisant le risque lié au dédommagement.
   On se propose donc de chercher une plus grande valeur pour n. Cette valeur devra vérifier la condition $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}95$, de façon à réduire à peu de chose les frais de dédommagement.
   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n de $\dfrac{S_n}{n}$ au seuil de 0,95.
   b) Justifier que si la borne supérieure de I_n est inférieure ou égale à $\dfrac{300}{n}$, alors $P(S_n \leq 300) \geq P\left(\dfrac{S_n}{n} \in I_n\right)$.
      Nous admettrons que si de I_n est inférieure ou égale à $\dfrac{300}{n}$, alors $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}95$.
      En posant $f(x) = 0{,}9x + 0{,}588\sqrt{x} - 300$, déduire de la question précédente que tous les entiers naturels n tels que $f(n) \leq 0$ permettent d'assurer que $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}95$.
   c) En étudiant le signe de $f(x)$, déterminer le plus grand entier vérifiant $f(n) \leq 0$.
   d) L'entier obtenu à la question précédente est-il l'entier le plus grand tel que $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}95$? (Justifier la réponse en déterminant l'entier le plus grand tel que $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}95$ à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.)

Exercice 5 – Dé équilibré
1. Un joueur lance un dé 60 fois, le six apparaît 16 fois. Au seuil de 95 %, peut-on accepter l'hypothèse selon laquelle le joueur utilise un dé équilibré :
   - avec les outils de seconde ?
   - avec les outils de première ?
   - avec les outils de terminale ?

2. Un joueur lance un dé 300 fois, le six apparaît 70 fois. Au seuil de 95 %, peut-on accepter l'hypothèse selon laquelle le joueur utilise un dé équilibré :
   - avec les outils de seconde ?
   - avec les outils de première ?
   - avec les outils de terminale ?