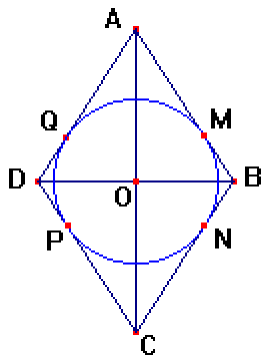
2_{nde}	Quadrilatères possédant un cercle inscrit : Calcul du rayon de ce cercle.

Dans ce devoir, on utilisera sans démonstration le théorème suivant :

> Un quadrilatère convexe possède un cercle inscrit si et seulement si la somme des longueurs de ses côtés opposés est la même pour les deux couples de côtés opposés.

Un losange possède donc un cercle inscrit.

I- Le cas du losange.



On admet que le centre du cercle inscrit est le point d'intersection O des diagonales du losange.
M, N, P et Q sont les points où le cercle inscrit est tangent aux côtés de ABCD.

1) Montrer que les triangles AOB et AOM sont semblables.

2) On note L la longueur d'un côté du losange et $b = \dfrac{\hat{B}}{2} = \widehat{ABD}$.

Montrer que $r = \dfrac{OA \times OB}{AB}$ puis que $r = L \sin b \cos b$.

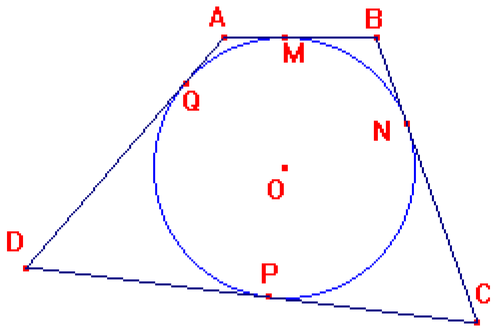
3) Calculer r quand $b = 45°$ à l'aide de la formule précédente. Expliquer, à l'aide d'une figure, comment on pouvait trouver ce résultat sans aucun calcul.

4) b est à nouveau un angle aigu quelconque. On note $x = AM$. Montrer que $\dfrac{x}{OA} = \dfrac{OA}{AB}$ et en déduire que $x = L \sin^2 b$.

5) La longueur des côtés d'un losange est $L = 4\ cm$. Calculer x et r pour $b = 30°$ puis pour $b = 60°$.

6) Pour quelles valeurs de b a-t-on $x > \dfrac{L}{2}$? $A\hat{B}C$ est-il alors aigu ou obtus ?

II- Un quadrilatère dont les longueurs des côtés sont 6 ; 10 ; 14 et 10 (dans cet ordre).



On a AB = 6, BC = 10 ; CD = 14 et DA = 10.
6+14 = 10+10, ce quadrilatère possède donc un cercle inscrit.

Les notations sont celles de la figure ci-contre, où M, N, P et Q sont les points où le cercle inscrit est tangent aux côtés de ABCD.

On note *r* le rayon du cercle inscrit.

On s'intéresse dans cette partie à la situation où M est le milieu de [AB].

1) Montrer que si M est le milieu de [AB] alors les quatre triangles OQA, OAM, OMB et OBN sont isométriques.
En déduire que $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$.

2) Montrer que DAM et MBC sont isométriques. En déduire que M est sur la médiatrice de [DC], puis que ABCD est un trapèze.

3) Montrer qu'alors $r = \sqrt{21}$.

Nous n'aborderons pas le problème, beaucoup plus difficile, du calcul de r lorsque M n'est pas le milieu de [AB].

III- Questions de réflexion.

1) Si le cercle inscrit à un quadrilatère ABCD touche l'un des côtés en son milieu, ABCD est-il nécessairement un trapèze ?

2) Si ABCD est un trapèze et possède un cercle inscrit, ce cercle touche-t-il nécessairement l'un des côtés en son milieu ?

Pour ces deux questions, une figure, si elle est convaincante, pourra être considérée comme une réponse satisfaisante.