OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2001

PREMIER EXERCICE :

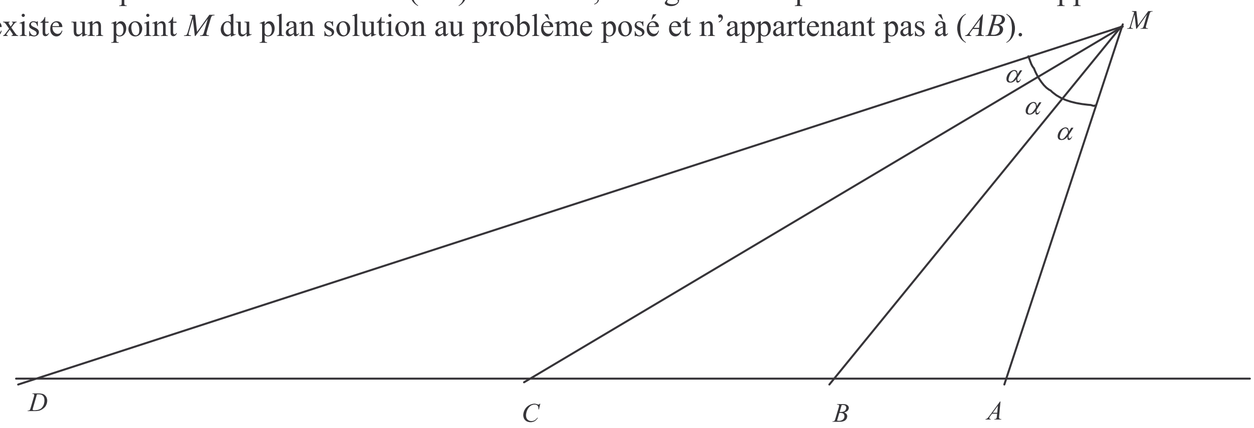
1°) Le dé repose au départ sur la face « **1** ».
La valeur minimale de s est donc **1**+2+1+2+…+1+2 = 3 × 1001 = 3003.
Cette somme contient 1001 nombres « 2 » et 1000 nombres « 1 » si l'on excepte le « **1** » initial.
La valeur maximale de s est **1**+4+3+4+3+…+4+3+4 = 1+4+1000×7=7005.

Remarque : Le calcul précédent est aisément généralisable. Appelons n ($n\geq 1$) le nombre d'étapes. s_n et S_n les valeurs minimales et maximales de la somme obtenue au bout des n étapes.
Pour $n=2$, $s_2=1+2+1 = 1+ 1\times 3$ et $S_2=1+4+3 = 1+ 1\times 7$.
Supposons que pour $n=2p$, $s_{2p}=1+3p$ et $S_{2p}=1+7p$.
Il vient $s_{2p+2} = s_{2p}+2+1 = 1+3p+3 = 1+3(p+1)$, et $S_{2p+2} = S_{2p}+4+3 = 1+7(p+1)$.
On montre de même que si n est impair, $s_{2p+1} = 3(p+1)$ et $S_{2p+1} = 5+7p$. On retrouve bien dans le cas $p=1000$, les valeurs trouvées plus haut.

2°) L'intérêt du dé tétraédrique est de pouvoir passer d'une face donnée à toute autre face, par basculement autour d'une des trois arêtes disponibles. Il est donc possible de substituer à tout numéro de face k ($k=1,2,3,4$), dans une somme s, le numéro de toute autre face distincte de k.
Ainsi, en partant de $\sigma_0 = s_{2001} = 3003$, le remplacement progressif des 1001 numéros « 2 » par des numéros « 3 » permet à s de prendre toute valeur entière comprise entre 3004 et 4004 .
Posons σ_1 = 4004 = **1**+3+1+3+1+…+1+3. Le remplacement progressif des 1000 « 1 » par des « 2 » dans σ_1 permet à s de prendre toute valeur entière entre 4005 et 5004.
Posons σ_2 = 5004 = **1**+3+2+3+2+…+2+3. Le remplacement progressif des 1001 « 3 » par des « 4 » dans σ_2 permet à s de prendre toute valeur entière entre 5005 et 6005.
Posons σ_3 = 6005 = **1**+4+2+4+2+…+2+4. Le remplacement progressif des 1000 « 2 » par des « 3 » dans σ_3 permet à s de prendre toute valeur entière entre 6006 et 7005. Ainsi s peut prendre toute valeur entière comprise entre 3003 et 7005.

DEUXIEME EXERCICE :

Tout point M de la droite (AB) convient, l'angle correspondant est nul. Supposons donc qu'il existe un point M du plan solution au problème posé et n'appartenant pas à (AB).



(MC) est bissectrice de l'angle $\widehat{DMB}$ et (MB) est bissectrice de l'angle $\widehat{CMA}$ Il s'agit donc de traduire ces deux propriétés ou bien géométriquement ou bien analytiquement.

1°) Solution 1 purement géométrique :

> Soit ABC un triangle. Si la bissectrice intérieure de l'angle A coupe $[BC]$ en G, alors $\dfrac{GB}{GC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Ce résultat peut-être obtenu au moins par deux méthodes simples :

a) Par des considérations d'aires : G est équidistant des deux côtés $[AB]$ et $[AC]$. Soit k cette distance commune et soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. L'aire du triangle ABG est $\dfrac{AH\times BG}{2}=\dfrac{k\,AB}{2}$. Celle du triangle ACG est $\dfrac{AH\times CG}{2}=\dfrac{k\,AC}{2}$. On a donc $k=\dfrac{AH\times BG}{AB}=\dfrac{AH\times CG}{AC}$ d'où le résultat.

b) Par des considérations trigonométriques : Appelons α la valeur commune des angles définis par la bissectrice (AG) et β l'angle $\widehat{BGA}$. Dans le triangle ABG, $\dfrac{BG}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin\beta}$ et dans le triangle ACG, $\dfrac{CG}{\sin\alpha}=\dfrac{AC}{\sin(\pi-\beta)}=\dfrac{AC}{\sin\beta}$ d'où le résultat cherché.

Revenons maintenant au problème posé et appliquons le lemme dans les triangles MAC et MBD. Comme $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = d$, on obtient les deux relations : $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{2}{d}$.

Les points M cherchés sont donc tels que $\boxed{4MA^2 - MC^2 = 0 \text{ et } d^2\,MB^2 - 4\,MD^2 = 0. \quad \mathbf{(1)}}$

Ces expressions sont équivalentes à $(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$ et $(d\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MD}).(d\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD})=0$.

Le barycentre du système $\{(A,2);(C,1)\}$ est le point B, celui de $\{(A,2);(C,-1)\}$ est le symétrique B' de C par rapport à A. $(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$ signifie que M appartient au cercle Γ_1 de diamètre $[BB']$.

Le barycentre du système $\{(B,d);(D,2)\}$ est le point C et lorsque $d\neq 2$, celui de $\{(B,d);(D,-2)\}$ est le point C' tel que $\overrightarrow{C'B}=\dfrac{2}{d-2}\overrightarrow{BD}$. $(d\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MD}).(d\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD})=0$ signifie que M appartient au cercle Γ_2 de diamètre $[CC']$.

Pour que les deux cercles se coupent il faut et il suffit que C' appartienne au segment $[BB']$. Donc que d'une part $d>2$ et d'autre part que $\dfrac{2}{d-2}BD=\dfrac{2}{d-2}\times(d+2)\leq 4$ ce qui entraîne $d\geq 6$.

Le cas $d=2$ place M sur la médiatrice de $[BD]$ qui ne coupe pas le cercle Γ_1 .

L'énoncé du problème laisse supposer que l'on recherche des solutions dans un demi plan limité par la droite (AB). Il existe donc une seule solution n'appartenant pas à cette droite lorsque $d>6$.

Remarque On peut également montrer que C' est le barycentre du système $\{(B,d-6);(B',d+2)\}$ et l'on retrouve bien que C' appartient au segment $[BB']$ si et seulement si $d\geq 6$.

<u>2°) Solution 2 mixte :</u>

Reprenons les relations **(1)** : $4MA^2 - MC^2 = 0$ et $d^2\, MB^2 - 4\, MD^2 = 0$ et interprétons les en utilisant un repère orthonormal du plan, par exemple le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Les points *A, B, C, D, M* ont respectivement dans ce repère les coordonnées : (3,0) ; (2,0) ; (0,0) ; ($-d$,0) et (x,y) . Nous pouvons même supposer $y>0$.

$4MA^2 - MC^2 = 0$ s'écrit : $4(3-x)^2 + 4y^2 - x^2 - y^2 = 0$ soit $(x-4)^2 + y^2 = 4$. Le point M appartient donc au cercle Γ_1 de centre Ω_1 (4,0) et e rayon 2. Il s'agit bien du cercle de diamètre [BB'] où B'(6,0).

$d^2\, MB^2 - 4\, MD^2 = 0$ s'écrit : $d^2(2-x)^2 + d^2y^2 - 4(-d-x)^2 - 4y^2 = 0$. Le cas d=2 ne fournissant aucune solution, l'expression précédente devient après réduction : $\left(x - \frac{2d}{d-2}\right)^2 + y^2 = \frac{4d^2}{(d-2)^2}$. *M* appartient donc au cercle Γ_2 de centre $\Omega_2 \left(\frac{2d}{d-2}, 0\right)$ et de rayon $r = \frac{2d}{|d-2|}$. Ce cercle passe par *C* . Une condition nécessaire pour qu'il recoupe Γ_1 est que l'abscisse de son centre soit positive. Il est donc nécessaire que $d > 2$. Dans ces conditions, l'abscisse du point C' , diamétralement opposé à *C* est donc $\frac{4d}{d-2}$ et l'on doit avoir $\frac{4d}{d-2} \leq 6$, ce qui permet bien de retrouver la condition $d \geq 6$. Remarquons que d=6 redonne $M=B'$ et que d=10 donne *M* (4,2). Ce point est « au dessus » de Ω_1 , c'est le point solution le plus éloigné de (*AB*).

<u>3°) Solution 3 purement analytique :</u>

A, ; B, C étant trois points du plan, repérés dans un repère orthonormal, on a :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB \times AC}$$

Appliquons cela dans le cas de la figure et dans le même repère que précédemment.

On obtient la double égalité : $\frac{\left|\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\right|}{MA \times MB} = \frac{\left|\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})\right|}{MB \times MC} = \frac{\left|\det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})\right|}{MC \times MD}$.

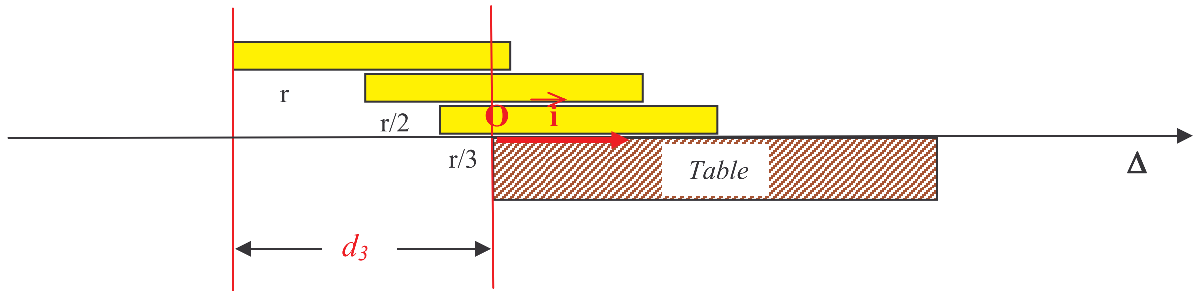
On obtient successivement :

$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \begin{vmatrix} 3-x & 2-x \\ -y & -y \end{vmatrix} = -y$; $\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \begin{vmatrix} 2-x & -x \\ -y & -y \end{vmatrix} = -2y$; $\det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \begin{vmatrix} -x & -d-x \\ -y & -y \end{vmatrix} = -dy$ ce qui fournit les deux relations $\frac{1}{MA} = \frac{2}{MC}$ et $\frac{2}{MB} = \frac{d}{MD}$ en supposant $y>0$.

On se retrouve donc dans le cadre de la solution 2.

<u>Remarque</u> : l'écriture de l'égalité des cosinus conduit à des calculs beaucoup plus complexes qui aboutissent néanmoins.

TROISIEME EXERCICE



1°) Appelons S_3 le solide constitué des trois pièces, installé au bord de la table.

Soit **P** le plan défini par le "dessus" de la table. Les projetés orthogonaux, sur **P**, des centres d'inertie des trois pièces sont alignés sur la droite Δ que nous rapportons au repère $(O,\vec{i})$ où $\|\vec{i}\| = 1\,\text{cm}$.

Les abscisses x_1 , x_2 , x_3, de ces trois projetés orthogonaux sont respectivement $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}; x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1; x_3 = -\frac{1}{3} + 1$. L'abscisse g_3 du centre d'inertie G_3 de S_3 est, en appelant m la masse commune des pièces de monnaie : $g_3 = m\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3m} = 0$. Ainsi, S_3 est bien en équilibre.

2°) Les notations de cette question généralisent les précédentes.

a) Le solide S_{n-1} étant donné, on suppose g_{n-1}=0. Glissons au ras de la table une $n^{\text{ième}}$ pièce. L'abscisse de son centre d'inertie est x_n=1. L'abscisse g'_n du centre d'inertie du solide S'_n ainsi constitué est : $g'_n = \frac{(n-1)g_{n-1} + 1}{n} = \frac{1}{n}$.

Le solide S_n est obtenu à partir du solide S'_n par translation de vecteur $-\frac{1}{n}\vec{i}$. Par conservation du barycentre, on obtient bien g_n=0 d'où le résultat.

b) Par définition même de l'empilage, $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n>1.

$$d_{2n} - d_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

c) Avec n=1, on obtient immédiatement $d_{2^2} - d_1 = d_4 - d_2 + d_2 - d_1 \geq 2\frac{1}{2}$.

Supposons alors $d_{2^p} - d_1 \geq \frac{p}{2}$;il vient

$$d_{2^{p+1}} - d_1 = d_{2^{p+1}} - d_{2^p} + d_{2^p} - d_1 \geq \frac{1}{2} + \frac{p}{2} = \frac{p+1}{2}$$

On obtient ainsi $d_{2^p} \geq \frac{p}{2} + 1$. Une longueur L, entière, étant donnée, il suffit donc, pour que le surplomb soit de longueur plus grande que L, que l'on ait $n \geq 2^{2L-2}$.

QUATRIEME EXERCICE:

Les deux cubes ayant une diagonale commune sont isométriques et se déduisent l'un de l'autre par rotation autour de la diagonale commune (AB). L'idée est donc de projeter les six sommets de ces deux cubes, autres que A et B sur un plan orthogonal à (AB), par exemple, le plan **P** médiateur de (AB). Nommons les sommets du cube $\mathcal{C}$ comme indiqué sur la figure 1 ci dessous et ceux du cube $\mathcal{C}'$ avec les mêmes lettres "primées". Les points C, D, E, C', D', E' d'une part et C_1, D_1, E_1, C'_1, D'_1, E'_1 d'autre part appartiennent à deux cercles de même axe (AB). Toutes les arêtes des deux cubes font le même angle avec le plan **P** . (Cet angle θ est d'ailleurs défini par son cosinus : $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, calculé par exemple dans le tétraèdre $ACDE$). Il en résulte que les longueurs des projections orthogonales de ces arêtes sur **P** sont toutes égales. Les projetés orthogonaux sur **P** des points C, D, E, C_1, D_1, E_1 d'une part et C', D', E', C'_1, D'_1, E'_1 d'autre part sont donc disposés aux sommets de deux hexagones réguliers dont l'un est l'image de l'autre par une rotation d'angle donné. Nommons ces projetés orthogonaux avec les mêmes lettres en minuscule. On obtient la figure 2.

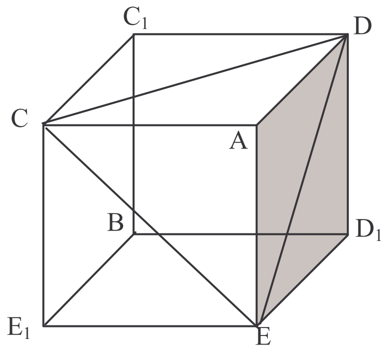


Figure 1

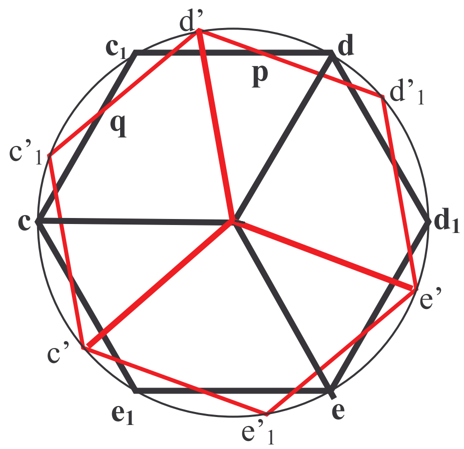


Figure 2

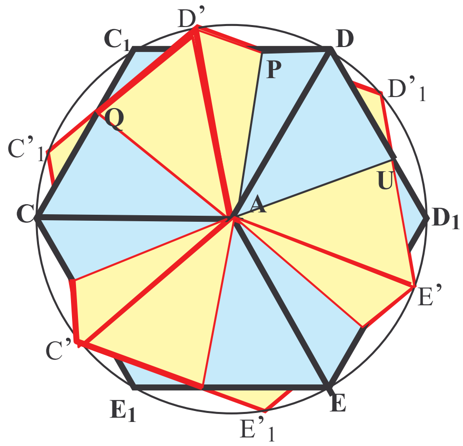


Figure 3

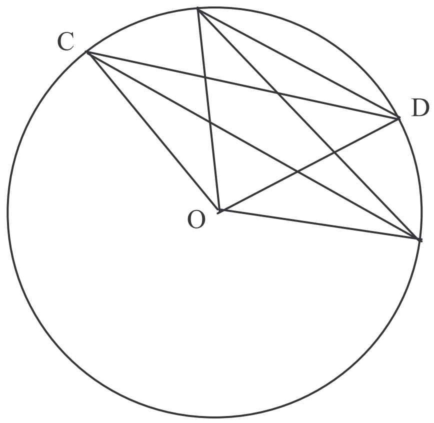


Figure 4

Etablissons quelques résultats intermédiaires.

a) Soient [AB] et [CD] sont deux cordes de même longueur, alors les droites (AD) et (BC) sont parallèles. C'est un bon exercice d'application des cas d'égalité des triangles en seconde. En cette année de première, le résultat est obtenu par égalité des angles au centre associés aux deux cordes puis à celle des arcs CA et DB les angles inscrits font le reste. (figure 4)

b) Soient (d) une droite d'un plan (P) et (d') une droite d'un plan (P') parallèle à (P). Soit (d_1) la projetée orthogonale de (d') sur (P). Si (d_1) est parallèle à (d) alors (d) est parallèle à

(d'). En effet, les plans (P) et (P') étant parallèles, les droites (d') et (d_1) sont parallèles d'où le résultat par transitivité du parallélisme.

Revenons à la figure 2 et intéressons nous à la configuration $dd'c_1d'_1$. d'après le résultat établi en a), les droites (dd') et ($c_1d'_1$) sont parallèles et sont les projetées orthogonales des droites (DD') et ($C_1D'_1$) situées dans des plans parallèles. Les droites (DD') et ($C_1D'_1$) sont donc parallèles donc coplanaires. Les segments [DC_1] et [$D'D'_1$] sont donc sécants en un point P dont le projeté orthogonal sur **P** est noté p. On détermine ainsi six points P,Q,R,S,T,U de projetés p,q,r,s,t,u. Les rotations conservant les rapports de distances, les points p et q partagent les segments [C_1D] et [CC_1] dans le même rapport comme d'ailleurs les points r,s,t,u sur leurs segments respectifs. Il en est donc de même pour les points P,Q,R,S,T,U sur leurs arêtes respectives puisque toutes les arêtes du cube C font le même angle avec le plan **P**. La figure 3 donne la construction des 6 points déterminés.

Le volume commun aux deux cubes est obtenu en retirant au volume du cube C, les volumes de six tétraèdres isométriques du type $PAUD$. Appelons l la longueur de l'arête du cube et x la longueur UD. Le volume du cube C est l^3 et le volume du tétraèdre $PAUD$ est $v=\frac{1}{3}\times l\times\frac{x(l-x)}{2}$. On obtient donc le volume $V(x)$ cherché :

$$V(x)=l^3-6v=l(x^2-xl+l^2)=l\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{3l^2}{4}\right].$$

On déduit enfin de cette formule que $V(x)\geq\frac{3l^2}{4}$ et que cette valeur est obtenue pour $x=l/2$. Pour cette valeur de x, les points P,Q,R,S,T,U sont confondus avec leurs projetés orthogonaux sur **P** : p,q,r,s,t,u.