

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2001

PREMIER EXERCICE :

1°) Le dé repose au départ sur la face « 1 ».

La valeur minimale de s est donc $1+2+1+2+\dots+1+2 = 3 \times 1001 = \underline{3003}$.

Cette somme contient 1001 nombres « 2 » et 1000 nombres « 1 » si l'on excepte le « 1 » initial.

La valeur maximale de s est $1+4+3+4+3+\dots+4+3+4 = 1+4+1000 \times 7 = \underline{7005}$.

Remarque : Le calcul précédent est aisément généralisable. Appelons n ($n \geq 1$) le nombre d'étapes. s_n et S_n les valeurs minimales et maximales de la somme obtenue au bout des n étapes.

Pour $n=2$, $s_2=1+2+1 = 1+1 \times 3$ et $S_2=1+4+3 = 1+1 \times 7$.

Supposons que pour $n=2p$, $s_{2p}=1+3p$ et $S_{2p}=1+7p$.

Il vient $s_{2p+2} = s_{2p}+2+1 = 1+3p+3 = 1+3(p+1)$, et $S_{2p+2} = S_{2p}+4+3 = 1+7(p+1)$.

On montre de même que si n est impair, $s_{2p+1} = 3(p+1)$ et $S_{2p+1} = 5+7p$. On retrouve bien dans le cas $p=1000$, les valeurs trouvées plus haut.

2°) L'intérêt du dé tétraédrique est de pouvoir passer d'une face donnée à toute autre face, par basculement autour d'une des trois arêtes disponibles. Il est donc possible de substituer à tout numéro de face k ($k=1,2,3,4$), dans une somme s , le numéro de toute autre face distincte de k .

Ainsi, en partant de $s_0 = s_{2001} = 3003$, le remplacement progressif des 1001 numéros « 2 » par des numéros « 3 » permet à s de prendre toute valeur entière comprise entre 3004 et 4004.

Posons $s_1 = 4004 = 1+3+1+3+1+\dots+1+3$. Le remplacement progressif des 1000 « 1 » par des « 2 » dans s_1 permet à s de prendre toute valeur entière entre 4005 et 5004.

Posons $s_2 = 5004 = 1+3+2+3+2+\dots+2+3$. Le remplacement progressif des 1001 « 3 » par des « 4 » dans s_2 permet à s de prendre toute valeur entière entre 5005 et 6005.

Posons $s_3 = 6005 = 1+4+2+4+2+\dots+2+4$. Le remplacement progressif des 1000 « 2 » par des « 3 » dans s_3 permet à s de prendre toute valeur entière entre 6006 et 7005. Ainsi s peut prendre toute valeur entière comprise entre 3003 et 7005.