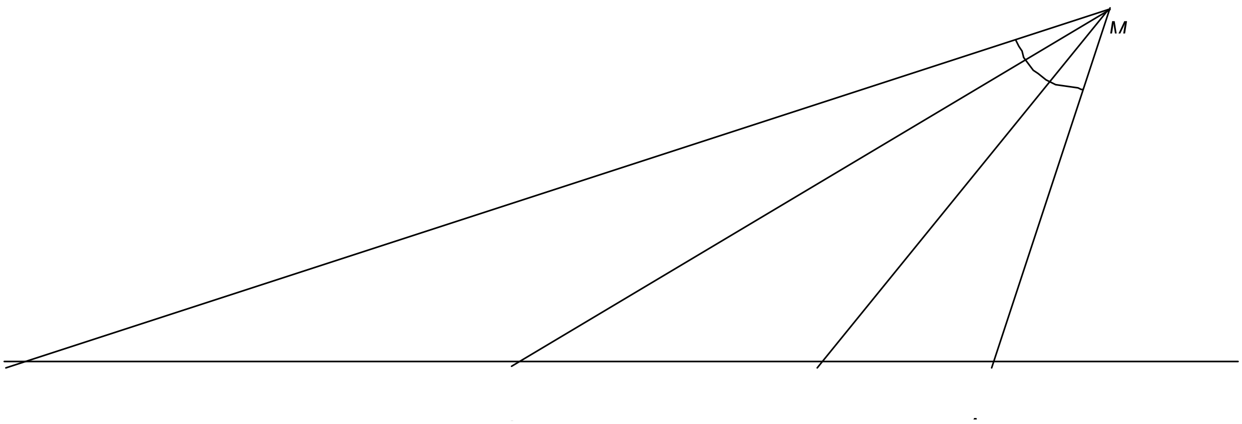
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2001

DEUXIEME EXERCICE :

Tout point M de la droite (AB) convient, l'angle correspondant est nul. Supposons donc qu'il existe un point M du plan solution au problème posé et n'appartenant pas à (AB).



(MC) est bissectrice de l'angle $\widehat{DMB}$ et (MB) est bissectrice de l'angle $\widehat{CMA}$ Il s'agit donc de traduire ces deux propriétés ou bien géométriquement ou bien analytiquement.

1°) Solution 1 purement géométrique :

> Soit ABC un triangle. Si la bissectrice intérieure de l'angle A coupe $[BC]$ en G, alors $\dfrac{GB}{GC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Ce résultat peut-être obtenu au moins par deux méthodes simples :

a) Par des considérations d'aires : G est équidistant des deux côtés $[AB]$ et $[AC]$. Soit k cette distance commune et soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. L'aire du triangle ABG est $\dfrac{AH\times BG}{2}=\dfrac{k\,AB}{2}$. Celle du triangle ACG est $\dfrac{AH\times CG}{2}=\dfrac{k\,AC}{2}$. On a donc $k=\dfrac{AH\times BG}{AB}=\dfrac{AH\times CG}{AC}$ d'où le résultat.

b) Par des considérations trigonométriques : Appelons a la valeur commune des angles définis par la bissectrice (AG) et b l'angle $\widehat{BGA}$. Dans le triangle ABG, $\dfrac{BG}{\sin a}=\dfrac{AB}{\sin b}$ et dans le triangle ACG, $\dfrac{CG}{\sin a}=\dfrac{AC}{\sin(\pi-b)}=\dfrac{AC}{\sin b}$ d'où le résultat cherché.

Revenons maintenant au problème posé et appliquons le lemme dans les triangles MAC et MBD.

Comme $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = d$, on obtient les deux relations : $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{2}{d}$.

Les points M cherchés sont donc tels que $\boxed{4MA^2 - MC^2 = 0 \text{ et } d^2\, MB^2 - 4\, MD^2 = 0. \quad \textbf{(1)}}$

Ces expressions sont équivalentes à $(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$ et $(d\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MD}).(d\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD})=0$.

Le barycentre du système {(*A*,2);(*C*,1)}est le point *B*, celui de {(*A*,2) ;(*C*,-1)}est le symétrique *B*' de *C* par rapport à*A*. $(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$ signifie que *M* appartient au cercle G_1 de diamètre [*BB'*].

Le barycentre du système {(*B* ,*d*) ;(*D*,2)} est le point *C* et lorsque $d \neq 2$, celui de {(*B* , *d*) ;(*D*,-2)} est le point *C'* tel que $\overrightarrow{C'B}=\frac{2}{d-2}\overrightarrow{BD}$. $(d\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{2MD}).(d\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD})=0$ signifie que *M* appartient au cercle G_2 de diamètre [*CC'*].

Pour que les deux cercles se coupent il faut et il suffit que *C'* appartienne au segment [*BB'*]. Donc que d'une part *d*>2 et d'autre part que $\frac{2}{d-2}BD=\frac{2}{d-2}\times(d+2)\leq 4$ ce qui entraîne $d\geq 6$.

Le cas *d*=2 place *M* sur la médiatrice de [*BD*] qui ne coupe pas le cercle G_1 .

L'énoncé du problème laisse supposer que l'on recherche des solutions dans un demi plan limité par la droite (*AB*). Il existe donc une seule solution n'appartenant pas à cette droite lorsque *d* >6.

Remarque On peut également montrer que *C'* est le barycentre du système {(*B,d*-6) ; (*B',d*+2)} et l'on retrouve bien que *C'* appartient au segment [*BB'*] si et seulement si $d \geq 6$.

2°) Solution 2 mixte :

Reprenons les relations **(1)** : $4MA^2 - MC^2=0$ et $d^2 MB^2 - 4 MD^2 = 0$ et interprétons les en utilisant un repère orthonormal du plan, par exemple le repère $(C,\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Les points *A, B, C, D, M* ont respectivement dans ce repère les coordonnées : (3,0) ; (2,0) ; (0,0) ; (-*d*,0) et (*x*,*y*) . Nous pouvons même supposer *y*>0.

$4MA^2 - MC^2=0$ s'écrit : $4(3-x)^2+4y^2-x^2-y^2=0$ soit $(x-4)^2+y^2=4$. Le point M appartient donc au cercle G_1 de centre W_1 (4,0) et e rayon 2. Il s'agit bien du cercle de diamètre [*BB'*] où *B'*(6,0).

$d^2 MB^2 - 4 MD^2 = 0$ s'écrit : $d^2(2-x)^2+d^2y^2-4(-d-x)^2-4y^2=0$. Le cas *d*=2 ne fournissant aucune solution, l'expression précédente devient après réduction : $\left(x-\frac{2d}{d-2}\right)^2+y^2=\frac{4d^2}{(d-2)^2}$. *M* appartient donc au cercle G_2 de centre $W_2\left(\frac{2d}{d-2},0\right)$ et de rayon $r=\frac{2d}{|d-2|}$. Ce cercle passe par *C* . Une condition nécessaire pour qu'il recoupe G_1 est que l'abscisse de son centre soit positive. Il est donc nécessaire que *d* >2. Dans ces conditions, l'abscisse du point *C'* , diamétralement opposé à*C* est donc $\frac{4d}{d-2}$ et l'on doit avoir $\frac{4d}{d-2}\leq 6$, ce qui permet bien de retrouver la condition $d \geq 6$. Remarquons que *d*=6 redonne *M=B'* et que *d*=10 donne *M* (4,2). Ce point est « au dessus » de W_1, c'est le point solution le plus éloigné de (*AB*).

3°) Solution 3 purement analytique :

A, ; B, C étant trois points du plan, repérés dans un repère orthonormal, on a :

$$\sin\widehat{BAC}=\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB\times AC}$$

Appliquons cela dans le cas de la figure et dans le même repère que précédemment.

On obtient la double égalité : $\frac{|\det(\vec{MA},\vec{MB})|}{MA\times MB}=\frac{|\det(\vec{MB},\vec{MC})|}{MB\times MC}=\frac{|\det(\vec{MC},\vec{MD})|}{MC\times MD}$.

On obtient successivement :

$\det(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\begin{vmatrix}3-x & 2-x\\ -y & -y\end{vmatrix}=-y$; $\det(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})=\begin{vmatrix}2-x & -x\\ -y & -y\end{vmatrix}=-2y$; $\det(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD})=\begin{vmatrix}-x & -d-x\\ -y & -y\end{vmatrix}=-dy$ ce qui fournit les deux relations $\frac{1}{MA}=\frac{2}{MC}$ et $\frac{2}{MB}=\frac{d}{MD}$ en supposant $y>0$.

On se retrouve donc dans le cadre de la solution 2.

Remarque : l'écriture de l'égalité des cosinus conduit à des calculs beaucoup plus complexes qui aboutissent néanmoins.