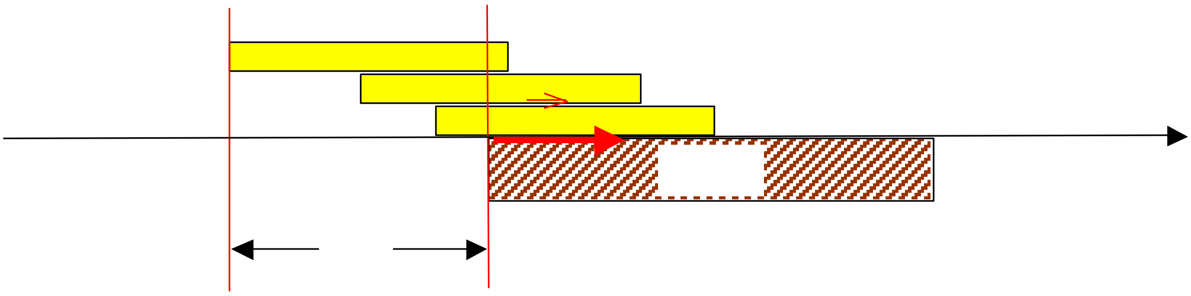
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2001

TROISIEME EXERCICE



1°) Appelons S_3 le solide constitué des trois pièces, installé au bord de la table.

Soit **P** le plan défini par le "dessus" de la table. Les projetés orthogonaux, sur **P**, des centres d'inertie des trois pièces sont alignés sur la droite D que nous rapportons au repère $(O,\vec{i})$ où $\|\vec{i}\| = 1\,\text{cm}$.

Les abscisses x_1, x_2, x_3, de ces trois projetés orthogonaux sont respectivement $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}; x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1; x_3 = -\frac{1}{3} + 1$. L'abscisse g_3 du centre d'inertie G_3 de S_3 est, en appelant m la masse commune des pièces de monnaie : $g_3 = m\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3m} = 0$. Ainsi, S_3 est bien en équilibre.

2°) Les notations de cette question généralisent les précédentes.

a) Le solide S_{n-1} étant donné, on suppose $g_{n-1}=0$. Glissons au ras de la table une $n^{\text{ième}}$ pièce. L'abscisse de son centre d'inertie est $x_n=1$. L'abscisse g'_n du centre d'inertie du solide S'_n ainsi constitué est : $g'_n = \frac{(n-1)g_{n-1} + 1}{n} = \frac{1}{n}$.

Le solide S_n est obtenu àpartir du solide S'_n par translation de vecteur $-\frac{1}{n}\vec{i}$. Par conservation du barycentre, on obtient bien $g_n=0$ d'où le résultat.

b) Par définition même de l'empilage, $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel $n>1$.

$$d_{2n} - d_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

c) Avec $n=1$, on obtient immédiatement $d_{2^2} - d_1 = d_4 - d_2 + d_2 - d_1 \geq 2\frac{1}{2}$.

Supposons alors $d_{2^p} - d_1 \geq \frac{p}{2}$; il vient

$$d_{2^{p+1}} - d_1 = d_{2^{p+1}} - d_{2^p} + d_{2^p} - d_1 \geq \frac{1}{2} + \frac{p}{2} = \frac{p+1}{2}$$

On obtient ainsi $d_{2^p} \geq \frac{p}{2} + 1$. Une longueur L, entière, étant donnée, il suffit donc, pour que le surplomb soit de longueur plus grande que L, que l'on ait $n \geq 2^{2L-2}$.