OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2001

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 :

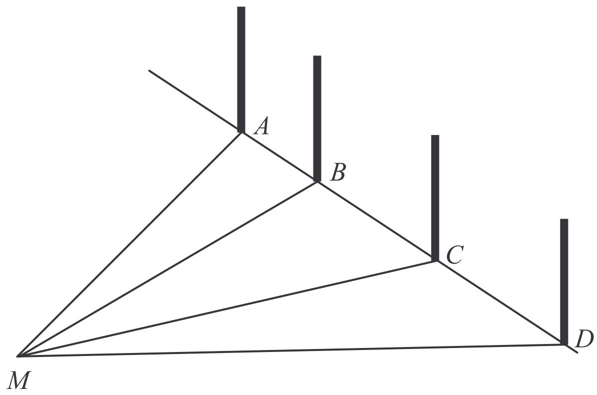
Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4 .
Le dé est posé sur une table, face « 1 » contre cette table.
Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.
A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait ainsi la somme s de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le « 1 » initial.

1°) Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour s.

2°) La somme s peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

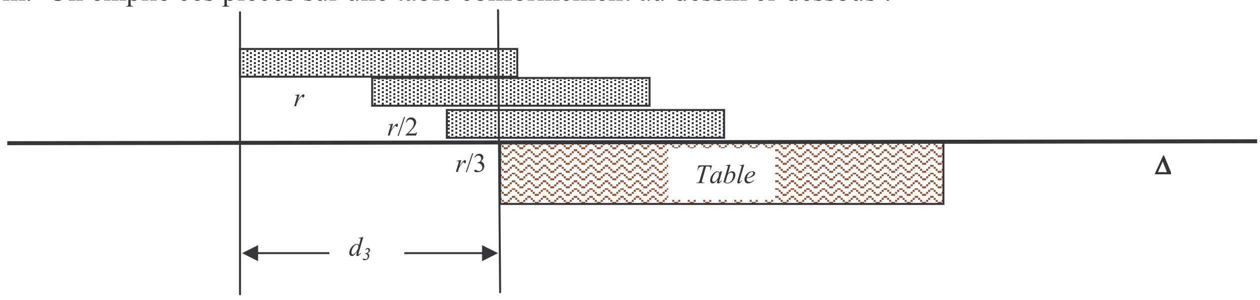
EXERCICE 2 :

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantés en A, B, C et D dans cet ordre.
Ces poteaux délimitent trois buts de largeurs : $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = d$, où d est une longueur donnée.
Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMD}$ égaux.



EXERCICE 3 :

1°) On dispose de trois pièces de monnaie homogènes, de même épaisseur et de même rayon : $r = 1$ cm. On empile ces pièces sur une table conformément au dessin ci-dessous :



Montrer que le système est en équilibre c'est à dire que le centre d'inertie du solide constitué des trois pièces est situé à la verticale du bord de la table. (On pourra munir la droite Δ d'un repère adapté)

2°) On généralise à n pièces le précédent empilement.

a) Montrer que le centre d'inertie du solide constitué des n pièces est encore situé à la verticale du bord de la table.

b) On appelle d_n la longueur du surplomb. Montrer que $d_{2n} - d_n \geq \frac{1}{2}$.

c) Peut-on choisir n de telle manière que le surplomb soit aussi long que l'on veut ?

EXERCICE 4 :

Dessinez un cube C (un dessin même approximatif en perspective suffira).
Soient A un des sommets et B le sommet opposé, c'est à dire tel que le milieu du segment $[AB]$ soit le centre du cube.
Considérons un autre cube C' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés.
Certaines arêtes de C rencontrent des arêtes de C'.

1°) Justifiez le fait que, en dehors de A et de B, on obtient ainsi six points d'intersection entre une arête de C et une arête de C'. Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.

2°) V étant le volume de C, quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et C' ?