OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2002

PREMIER EXERCICE :

Appelons v la vitesse de la fourmi et V celle de la colonne.

A l'aller, la distance d_1 parcourue par la fourmis la somme de 50cm et de la distance D_1 parcourue par la colonne. Si t_1 est le temps mis pour effectuer ce déplacement, on a $d_1 = 50 + D_1$ soit $\underline{vt_1 = 50 + Vt_1}$.

Au retour, la distance d_2 parcourue par la fourmis la différence de 50cm et de la distance D_2 parcourue par la colonne. Si t_2 est le temps mis pour effectuer ce déplacement, on a $d_2 = 50 - D_2$ soit $\underline{vt_2 = 50 - Vt_2}$.

Enfin, on sait que $D_1 + D_2 = 50$. Le problème posé conduit au système suivant :

$$\begin{cases} vt_1 = 50 + Vt_1 \\ vt_2 = 50 - Vt_2 \\ Vt_1 + Vt_2 = 50 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit encore puisque } v>V, \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{50}{v-V} \\ t_2 = \dfrac{50}{v+V} \\ \dfrac{50V}{v-V} + \dfrac{50V}{v+V} = 50 \end{cases}.$$

La dernière équation de ce système s'écrit encore : $\dfrac{1}{\frac{v}{V}-1} + \dfrac{1}{\frac{v}{V}+1} = 1$. Il est donc possible de déterminer la valeur du rapport $k = \dfrac{v}{V}$ qui est solution de l'équation $\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k+1} = 1$ ou encore $k^2 - 2k - 1 = 0$. Seule la solution $k = 1 + \sqrt{2}$ est à retenir , il vient donc $v = (1+\sqrt{2})V$.

La distance parcourue par la fourmi est $d = d_1 + d_2 = v(t_1+t_2) = (1+\sqrt{2})V(t_1+t_2)$.

$$\boxed{d = 50(1+\sqrt{2})\ .}$$