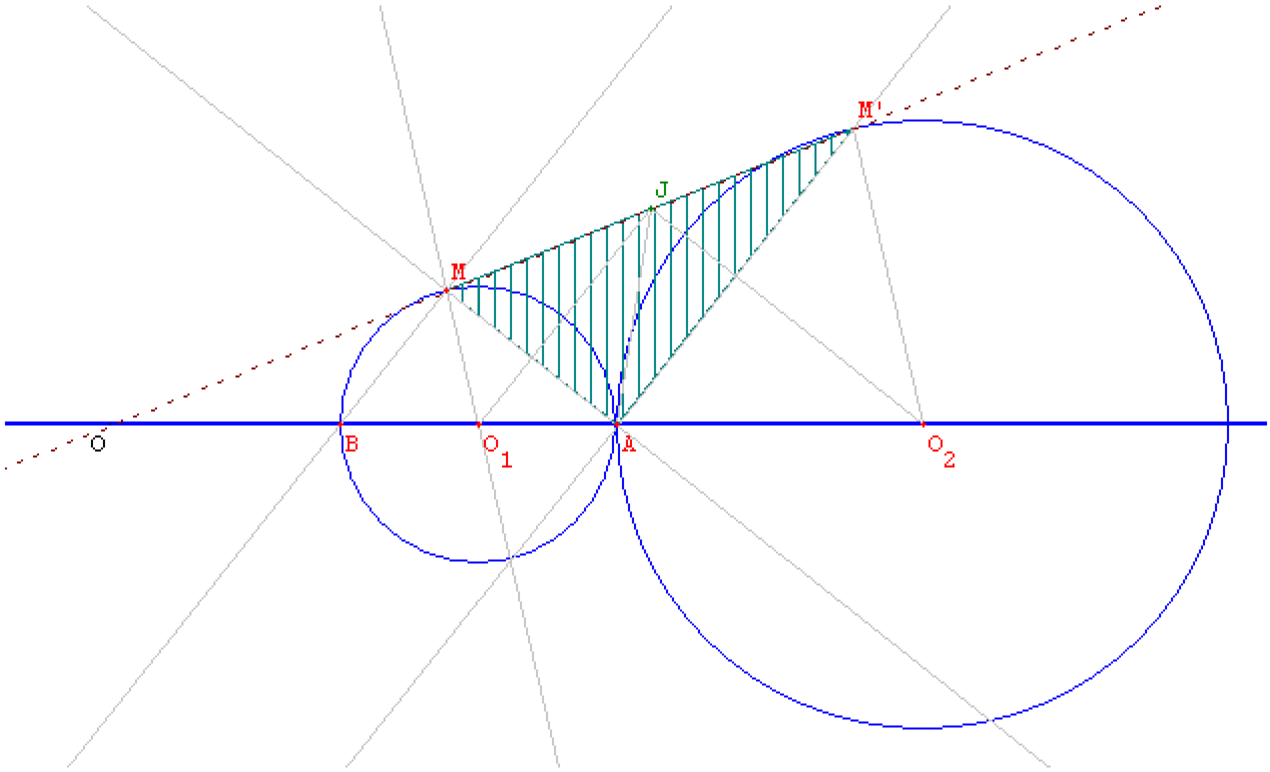
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2002

Deuxième exercice



1°) $[BA]$ étant un diamètre de $\mathcal{C}_1$, le triangle BMA est rectangle en M. Les droites (BM) et (AM') sont donc parallèles. $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par deux homothéties. L'une, de rapport négatif a pour centre A et l'autre, de rapport positif envoie B sur A. Notons h cette seconde homothétie. $h(M)$ est un point N de $\mathcal{C}_2$ tel que (BM) et (AN) soient parallèles. On a donc bien $N=M'$ puisque par hypothèse, les points A, M, M' sont distincts. (MM') passe donc par le centre O de l'homothétie h ; c'est un point fixe de la droite (O_1O_2).

2°) (O_1J) est médiatrice de $[AM]$, (O_2J) est médiatrice de $[AM']$. Le triangle O_1JO_2 est rectangle en J. J appartient donc au cercle de diamètre $[O_1O_2]$. Réciproquement, soit J un point du cercle de diamètre $[O_1O_2]$. Lorsque J est distinct de O_1 et de O_2, les perpendiculaires issues de J à (O_1J) et à (O_2J) recoupent $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en M et M'. Comme $O_1M = O_1A$ et que $O_2M' = O_2A$, (O_1J) et à (O_2J) sont les médiatrices respectives des segments $[AM]$ et $[AM']$. Le triangle MAM' est bien rectangle en A. L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[O_1O_2]$ privé des points O_1 et O_2.

3°) Posons $x = \widehat{AO_1M}$. $AM = 2R_1\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $AM' = 2R_2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2R_2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

L'aire du triangle MAM' est donc $\mathcal{A}(x) = 2R_1R_2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = R_1R_2\sin x$. Cette expression est maximale lorsque $x=\pi/2$.

Remarques :

- La question 1°) peut-être résolue par le théorème de Thalès mais il faut montrer au préalable que (MM') coupe la droite (O_1O_2).
- Le question 2°) peut être résolue en considérant l'homothétie qui transforme M en J. Il faut alors montrer qu'elle transforme B en O_1.
- La question 3°) peut être résolue sans connaître la formule de duplication du sinus en étudiant la fonction $\mathcal{A}$.