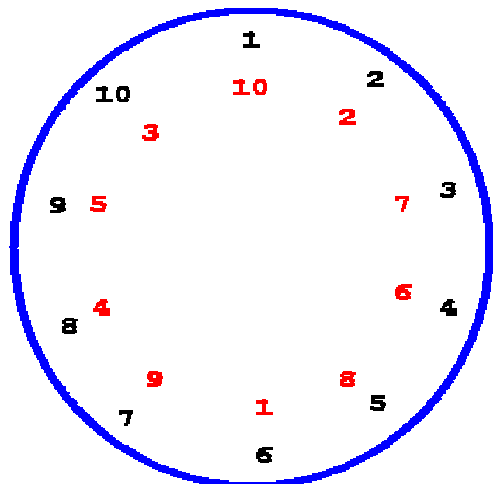


**OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES**  
**ANNEE 2002**

**Troisième exercice**

1- La distribution ci-dessous fournit les gains inscrits dans le tableau :



N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gain	15	19	15	21	15	18	14	18	12	18

La moyenne des dix gains est de 16,5€

2- La somme des gains est constante et est égale à :

$$S=3(1 + 2 + 3 + \dots + 10) = 165$$

Si chacune des dix personnes avait un gain au plus égal à 16 €, la somme des gains ne pourrait excéder 160 € ce qui est contraire à l'affirmation précédente.

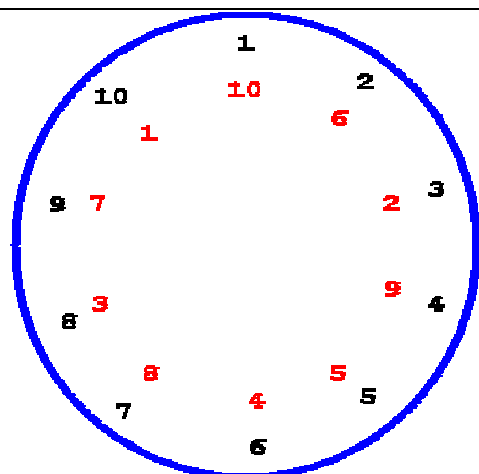
Une au moins des dix personnes a bien un gain supérieur ou égal à 17 €

3- On trouve assez rapidement une solution en associant des jetons "*forts*" à des jetons "*faibles*"

Ainsi, commençons à placer le "1"; un voisin s'impose : le "10". Ce qui donne au maximum "7" pour le second voisin de "1" et "6" comme second voisin du "10".

On obtient la distribution ci contre qui convient et donne les gains suivants :

1	10	6	2	9	5	4	8	3	7
18	17	18	17	16	18	17	15	18	11



On remarque au passage que les suites (10 , 6 , 2) ; (9 , 5 , 4) ; (8 , 3 , 7) ont toutes les trois comme somme 18

4- Supposons qu'aucun gain ne dépasse 17.

La somme  $S$  des dix jetons peut être obtenue en ajoutant à 1 la somme des points obtenus par trois trios consécutifs.

Par exemple, supposons, ce qui est toujours possible à une rotation près, que la personne "1" reçoive le jeton "1" :

$$S = 1 + \text{gain}(3) + \text{gain}(6) + \text{gain}(9) \leq 1 + 17 + 17 + 17 = 52.$$

D'où une contradiction.

*On ne peut donc pas remplacer dans la question précédente 18 par 17 ou, ce qui revient au même, on peut remplacer dans la question 2, 17 par 18*