OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2002

Quatrième exercice

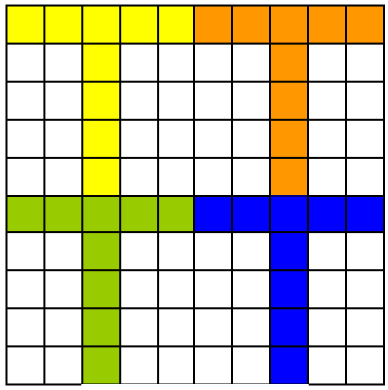


figure 1

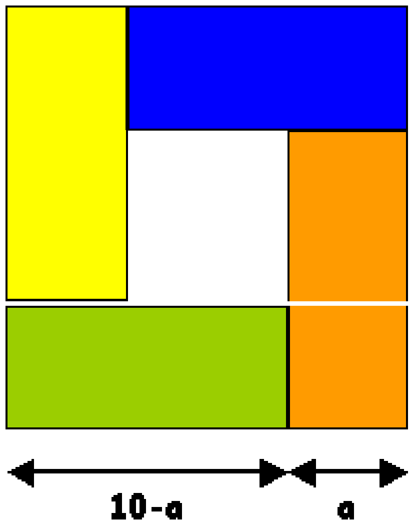
1- Dessiner une telle solution ne présente aucune difficulté, par exemple :

2- Une pièce est incluse dans un rectangle de taille (a ; 10-a) avec a = 1, ... ,5

L'une des dimensions d'un tel rectangle est donc nécessairement inférieure ou égale à 5, l'autre étant inférieure ou égale à 9.

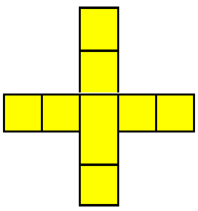
Quelle que soit sa forme, elle peut donc être dessinée dans un rectangle de taille (10 , 5), il est facile de créer une partition du damier initial en deux rectangles de taille (10 , 5)

3- Montrons qu'il est toujours possible, quelle que soit sa forme, de poser quatre répliques d'une pièce sur le damier, mais qu'il est en général impossible d'en poser 5.



a- Considérons la partition ci-contre du damier initial , on peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 sans qu'il y ait chevauchement des quatre rectangles. Or une pièce donnée est nécessairement inscrite dans un rectangle de taille (1 ; 9) ou (2 ; 8) ou (3 ; 7) ou (4 ; 6) ou (5 ; 5) dont quatre répliques peuvent être posées de manière disjointe sur le damier

b- Montrons qu'il existe une pièce dont cinq répliques ne peuvent être posées sur le damier en respectant les règles. Pour cela il est naturel de penser à une pièce ayant un maximum d'éléments de symétrie afin qu'elle "occupe" le plus de place possible



La pièce en forme de croix s'impose. Le carré central d'une telle pièce est nécessairement placé sur un des carrés coloriés du damier de la figure 3

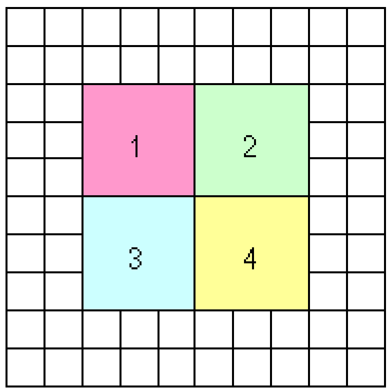


figure 3

Supposons que cinq croix soient disposées sur le damier , deux carrés centraux sont ainsi disposés sur un même carré de taille (3 ; 3) numéroté 1, 2, 3 ou 4. Il y a donc chevauchement