OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
ANNEE 2002

PREMIER EXERCICE :

Appelons v la vitesse de la fourmi et V celle de la colonne.

A l'aller, la distance d_1 parcourue par la fourmis la somme de 50cm et de la distance D_1 parcourue par la colonne. Si t_1 est le temps mis pour effectuer ce déplacement, on a $d_1 = 50 + D_1$ soit $\underline{vt_1 = 50 + Vt_1}$.

Au retour, la distance d_2 parcourue par la fourmis la différence de 50cm et de la distance D_2 parcourue par la colonne. Si t_2 est le temps mis pour effectuer ce déplacement, on a $d_2 = 50 - D_2$ soit $\underline{vt_2 = 50 - Vt_2}$.

Enfin, on sait que $D_1 + D_2 = 50$. Le problème posé conduit au système suivant :

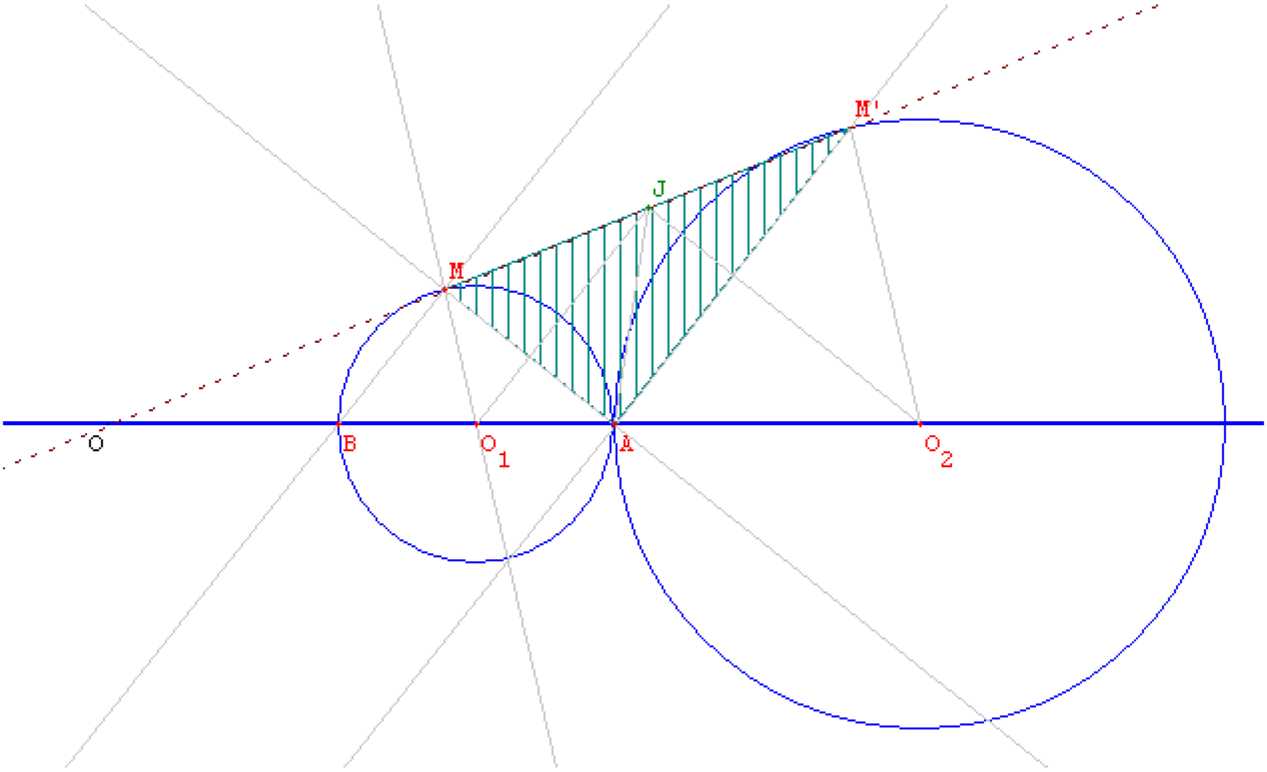
$$\begin{cases} vt_1 = 50 + Vt_1 \\ vt_2 = 50 - Vt_2 \\ Vt_1 + Vt_2 = 50 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit encore puisque } v>V, \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{50}{v-V} \\ t_2 = \dfrac{50}{v+V} \\ \dfrac{50V}{v-V} + \dfrac{50V}{v+V} = 50 \end{cases} .$$

La dernière équation de ce système s'écrit encore : $\dfrac{1}{\dfrac{v}{V}-1} + \dfrac{1}{\dfrac{v}{V}+1} = 1$. Il est donc possible de déterminer la valeur du rapport $k = \dfrac{v}{V}$ qui est solution de l'équation $\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k+1} = 1$ ou encore $k^2 - 2k - 1 = 0$. Seule la solution $k = 1 + \sqrt{2}$ est à retenir , il vient donc $v = (1+\sqrt{2})V$.

La distance parcourue par la fourmi est $d = d_1 + d_2 = v(t_1+t_2) = (1+\sqrt{2})V(t_1 + t_2)$.

$$\boxed{d = 50(1+\sqrt{2})\ .}$$

Deuxième exercice



1°) $[BA]$ étant un diamètre de $\mathcal{C}_1$, le triangle BMA est rectangle en M. Les droites (BM) et (AM') sont donc parallèles. $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par deux homothéties. L'une, de rapport négatif a pour centre A et l'autre, de rapport positif envoie B sur A. Notons h cette seconde homothétie. $h(M)$ est un point N de $\mathcal{C}_2$ tel que (BM) et (AN) soient parallèles. On a donc bien $N=M'$ puisque par hypothèse, les points A, M, M' sont distincts. (MM') passe donc par le centre O de l'homothétie h ; c'est un point fixe de la droite (O_1O_2).

2°) (O_1J) est médiatrice de $[AM]$, (O_2J) est médiatrice de $[AM']$. Le triangle O_1JO_2 est rectangle en J . J appartient donc au cercle de diamètre $[O_1O_2]$. Réciproquement, soit J un point du cercle de diamètre $[O_1O_2]$. Lorsque J est distinct de O_1 et de O_2, les perpendiculaires issues de J à (O_1J) et à (O_2J) recoupent $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en M et M' . Comme $O_1M= O_1A$ et que $O_2M' = O_2A$, (O_1J) et à (O_2J) sont les médiatrices respectives des segments $[AM]$ et $[AM']$. Le triangle MAM' est bien rectangle en A. L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[O_1O_2]$ privé des points O_1 et O_2.

3°) Posons $x = \widehat{AO_1M}$. $AM = 2R_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $AM' = 2R_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2R_2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

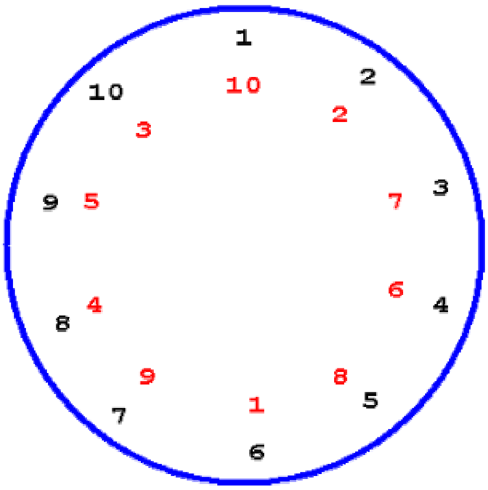
L'aire du triangle MAM' est donc $a(x)= 2R_1R_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = R_1R_2 \sin x$. Cette expression est maximale lorsque $x=\pi/2$.

Remarques :

- La question 1°) peut-être résolue par le théorème de Thalès mais il faut montrer au préalable que (MM') coupe la droite (O_1O_2).
- Le question 2°) peut être résolue en considérant l'homothétie qui transforme M en J . Il faut alors montrer qu'elle transforme B en O_1 .
- La question 3°) peut être résolue sans connaître la formule de duplication du sinus en étudiant la fonction a.

Troisième exercice

1- La distribution ci-dessous fournit les gains inscrits dans le tableau :



N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gain	15	19	15	21	15	18	14	18	12	18

La moyenne des dix gains est de 16,5€

2- La somme des gains est constante et est égale à :

$$S=3(1 + 2 + 3 +\dots + 10) = 165$$

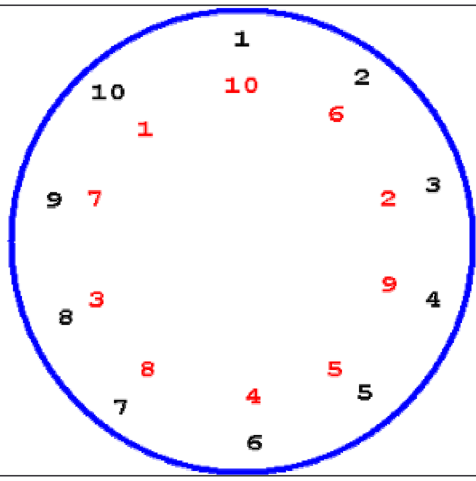
Si chacune des dix personnes avait un gain au plus égal à 16 €, la somme des gains ne pourrait excéder 160 € ce qui est contraire à l'affirmation précédente.
Une au moins des dix personnes a bien un gain supérieur ou égal à 17 €

3- On trouve assez rapidement une solution en associant des jetons *"forts"* à des jetons *"faibles"*

Ainsi, commençons à placer le *"1"* ; un voisin s'impose : le *"10"*. Ce qui donne au maximum *"7"* pour le second voisin de *"1"* et *"6"* comme second voisin du *"10"*.

On obtient la distribution ci contre qui convient et donne les gains suivants :

1	10	6	2	9	5	4	8	3	7
18	17	18	17	16	18	17	15	18	11



On remarque au passage que les suites (10 , 6 , 2) ; (9 , 5 , 4) ; (8 , 3 , 7) ont toutes les trois comme somme 18

4- Supposons qu'aucun gain ne dépasse 17.

La somme S des dix jetons peut être obtenue en ajoutant à 1 la somme des points obtenus par trois trios consécutifs.
Par exemple, supposons, ce qui est toujours possible à une rotation près, que la personne "1" reçoive le jeton "1" :
$S = 1 + \text{gain}(3) + \text{gain}(6) + \text{gain}(9) \leq 1 + 17 + 17 + 17 = 52$.
D'où une contradiction.

On ne peut donc pas remplacer dans la question précédente 18 par 17 ou, ce qui revient au même, on peut remplacer dans la question 2, 17 par 18

Quatrième exercice

1- Dessiner une telle solution ne présente aucune difficulté, par exemple :

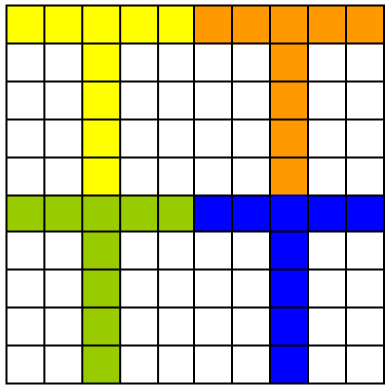
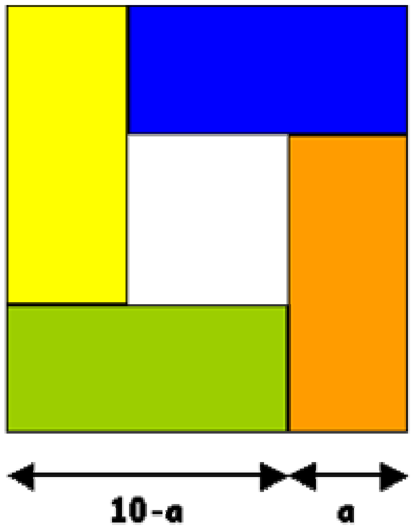


figure 1

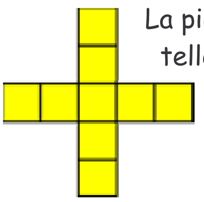
2- Une pièce est incluse dans un rectangle de taille (a ; 10-a) avec a = 1, ... ,5
L'une des dimensions d'un tel rectangle est donc nécessairement inférieure ou égale à 5, l'autre étant inférieure ou égale à 9.
Quelle que soit sa forme, elle peut donc être dessinée dans un rectangle de taille (10 , 5), il est facile de créer une partition du damier initial en deux rectangles de taille (10 , 5)

3- Montrons qu'il est toujours possible, quelle que soit sa forme, de poser quatre répliques d'une pièce sur le damier, mais qu'il est en général impossible d'en poser 5.

<u>a-</u> Considérons la partition ci-contre du damier initial , on peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 sans qu'il y ait chevauchement des quatre rectangles. Or une pièce donnée est nécessairement inscrite dans un rectangle de taille (1 ; 9) ou (2 ; 8) ou (3 ; 7) ou (4 ; 6) ou (5 ; 5) dont quatre répliques peuvent être posées de manière disjointe sur le damier



<u>b-</u> Montrons qu'il existe une pièce dont cinq répliques ne peuvent être posées sur le damier en respectant les règles. Pour cela il est naturel de penser à une pièce ayant un maximum d'éléments de symétrie afin qu'elle "occupe" le plus de place possible



La pièce en forme de croix s'impose. Le carré central d'une telle pièce est nécessairement placé sur un des carrés coloriés du damier de la figure 3

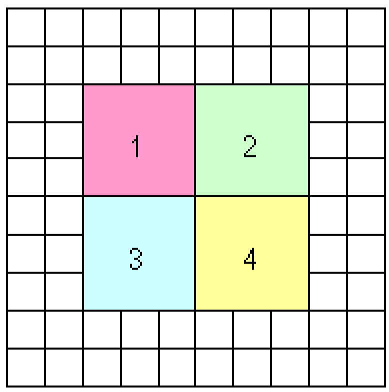


figure 3

Supposons que cinq croix soient disposées sur le damier , deux carrés centraux sont ainsi disposés sur un même carré de taille (3 ; 3) numéroté 1, 2, 3 ou 4. Il y a donc chevauchement