Olympiades Académiques de Mathématiques

SESSION 2002

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 :

Des fourmis se déplacent en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.

La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission accomplie retourne aussitôt à la queue de la colonne.

Sachant que, pendant cet aller et retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

EXERCICE 2 :

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles de centres distincts O_1 et O_2 et de rayons distincts R_1 et R_2, tangents extérieurement en un point A. On appelle B le point de $\mathcal{C}_1$, diamétralement opposé à A.

A tout point M de $\mathcal{C}_1$, distinct de A et de B, on associe le point M' de $\mathcal{C}_2$ tel que le triangle MAM' soit rectangle en A.

1°) Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}_1$ privé de A et de B.

2°) On appelle J le milieu du segment $[MM']$. Déterminer le lieu de J lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}_1$ privé de A et de B.

3°) Quelle doit être la position de M pour que l'aire du triangle MAM' soit maximale ?

EXERCICE 3 :

10 personnes sont assises autour d'une table ronde.

10 jetons portant les numéros de 1 à 10 sont distribués au hasard à ces 10 personnes.

Chaque personne gagne une somme égale, en euros, au total du numéro de son propre jeton, de celui de son voisin de gauche et de celui de son voisin de droite.

1°) A l'aide d'un procédé aléatoire de votre choix, donner un exemple de répartition des jetons.
Sur cet exemple, indiquer le gain de chaque personne et la moyenne de ces dix gains.

2°) Prouver que, quelle que soit la répartition des jetons, au moins une des dix personnes aura un gain supérieur ou égal à 17 €.

3°) Donner un exemple où tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 €.

4°) Peut-on, dans la deuxième question, remplacer 17 par 18 ?

EXERCICE 4 :

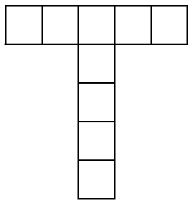
On dispose :

- D’un damier carré formé de 10×10 petits carrés identiques.
- D’une pièce d’un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un côté, 9 petits carrés identiques à ceux du damier.

Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce en respectant les règles suivantes :

- Chaque exemplaire peut-être tourné ou retourné.
- Chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier.
- Deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.

1°) Dessiner l’une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-contre .



2°) Montrer que, quelle que soit la forme de la pièce de départ, il est possible de poser deux exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci dessus.

3°) Peut-on, dans la question précédente, remplacer deux par trois, par quatre, par cinq, etc… ?