EXERCICE 1

Un professeur commande des livres pour n élèves de première S. Le prix d'un livre est 20€, mais l'éditeur offre un livre pour 4 achetés. On appelle p_n le prix de revient moyen de chaque livre.

1°) Présenter dans un tableau les vingt premières valeurs p_1 , p_2 ,…, p_{20} de la suite (p_n).
2°) Quelles conjectures formuleriez vous à propos de cette suite ?
3°) Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles $p_n = 16$?
4°) Explicitez p_n pour tout entier naturel n.
5°) La suite (p_n) est-elle convergente ?

Correction :

1°) On obtient facilement le tableau suivant où les valeurs de p_n sont données avec deux décimales exactes:

n	p_n	n	p_n	n	p_n	n	p_n
1	20	6	16,66	11	16,36	16	16,25
2	20	7	17,14	12	16,66	17	16,47
3	20	8	17,50	13	16,92	18	16,66
4	20	9	17,77	14	17,14	19	16,84
5	16	10	16	15	16	20	16

2°) On peut émettre, entre autres, les conjectures suivantes:

- $p_n = 16$ lorsque n est multiple de 5.
- Les suites (p_{5k+1}), (p_{5k+2}) (p_{5k+3}) (p_{5k+4}) sont décroissantes.
- $p_{5k+1} < p_{5k+2} < p_{5k+3} < p_{5k+4}$ pour tout entier naturel k.
- (p_n) converge vers 16 comme d'ailleurs les suites extraites (p_{5k+1}), (p_{5k+2}), (p_{5k+3}), (p_{5k+4}) (p_{5k}).

On se propose, dans les questions qui viennent, de prouver certaines de ces conjectures.

3°) et 4°) Si n=5k, on paye 4k livres et l'éditeur offre k livres. Le prix payé est donc 80k€ et le prix de revient moyen est bien 16€.

Le nombre de livres offerts reste égal à k lorsque n=5k+r où r=1,2,3,4. On a donc $p_n= 20\,\dfrac{4k+r}{5k+r}$ qu'il est commode de mettre sous la forme : $p_n = 16 + \dfrac{4r}{n}$. Cette formule donne la forme explicite de p_n et prouve en outre que l'équation p_n=16 n'a pas d'autre solution que n=5k .

5°) La suite (p_n) converge vers 16 comme on pouvait s'y attendre.

Compléments : Il est intéressant de constater :

- Que $\dfrac{n}{4}\left(p_n - 16\right)$ converge vers r .
- Que la suite (p_{5k+r}) pour r fixé est décroissante : en effet :

$$p_{5(k+1)+r} - p_{5k+r} = \frac{-20r}{(5(k+1)+r)(5k+r)} < 0 .$$

Chacune de ces suites extraites converge évidemment vers 16.