EXERCICE 2

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan tels que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD, ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y. C'est par exemple le cas lorsque ABCD est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1°) Etude du cas « 1,5 » où l'une des distance est égale à x et les cinq autres à y.
Montrez qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessinez cette configuration
2°) Etude du cas « 2,4 » où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y.

- *a) On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun. Quelle configuration obtient-on ? Dessinez là*
- *b) Que se passe t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?*

3°) Etudiez le cas « 3,3 » .

Correction :

1°) Le cas « 1,5 ». Supposons que $AB=x$. On a donc $AC = AD = BC = BD = CD = y$. Les triangles ACD et BCD sont équilatéraux. On obtient une seule configuration puisque A≠B. (*fig1*).

2°) Le cas « 2,4 ».

a) Posons $AB=CD=x$. On a donc AC, AD, BC, $BD=y$. Le quadrilatère cherché est un losange dont les diagonales ont même longueur, c'est le carré donné en exemple.

b) Posons $AB=AC=x$. On a donc AD, BC, BD, $CD=y$. Le triangle BCD est equilateral, A est à l'intersection de la médiatrice de [BC] et du cercle de centre D et de rayon y. On a donc deux configurations : *fig*2 et *fig*3 .

3°) Le cas « 3 ,3 ».

a) Les trois segments de longueur x sont disposés en étoile, par exemple $AB=AC=AD=x$. On a donc $BC=BD=CD=y$. Le triangle BCD est équilatéral et A est le centre de ce triangle : *fig4.*

b) Si les trois segments de longueur x forment un triangle équilatéral, on retrouve la précédente configuration.

c) Il reste le cas où les trois segments de longueur x forment une chaîne ouverte . Posons $AB=BC=CD=x$. On a donc $AC=AD=BD=y$. Les triangles BDA, ADC, ABC et BCD sont isocèles . Appelons O le point d'intersection des segments [BD] et [AC]. Les triangles BDA et ADC d'une part , ABC et BCD d'autre part sont isométriques (3ème cas). Les angles CAD et BAD d'une part, DBC et ACB d'autre part sont égaux . Puisque les angles BOC et AOB sont opposés par le sommet, ils sont égaux ce qui entraîne l'égalité des quatre angles précédents et le parallélisme des droites (BC) et (AD). La configuration cherchée est un trapèze isocèle : *fig5.*

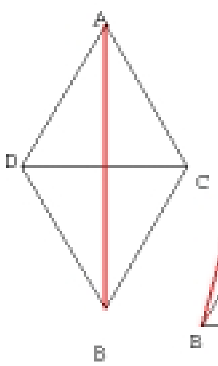

Fig 1

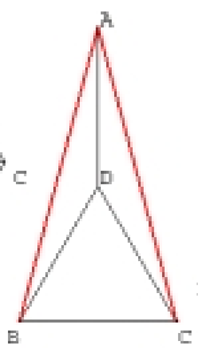

Fig 2

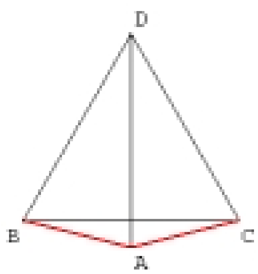

Fig 3

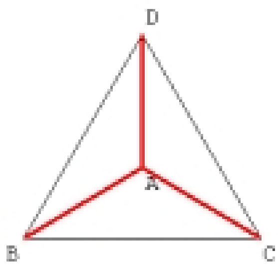

Fig 4

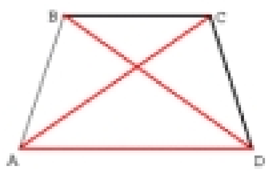

Fig 5