EXERCICE 3 :

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n. (On rappelle que la page 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003, mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.
Quel est le nombre de pages du livre et quels sont les numéros des pages collées ?

Correction :

Les pages collées portent deux numéros consécutifs qu'on peut appeler $2p$ et $2p+1$ puisque les numéros des pages de gauche sont pairs.

Le livre comporte n pages, la somme des n premiers entiers naturels est donnée par la formule $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$. On a donc $\dfrac{n(n+1)}{2}-2003=4p+1$ soit encore $n^2+n-4008=8p$.

On sait par ailleurs que $2\le 2p\le n$ donc $8\le 8p\le 4n$, les valeurs de n possibles sont donc les solutions entières du système d'inéquations : $\begin{cases} n^2+n-4016\ge 0\\ n^2-3n-4008\le 0\end{cases}$.

Posons pour x réel, $t_1(x)=x^2+x-4016$ et $t_2(x)=x^2-3x-4008$. Les discriminants associés sont respectivement $\Delta_1=16065$ et $\Delta_2=16041$. Les solutions de l'inéquation $t_1(x)\ge 0$ sont les réels de l'ensemble $S_1=\left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{16065}}{2}(\approx -63{,}87)\right]\cup\left[x_1=\dfrac{-1+\sqrt{16065}}{2}(\approx 62{,}87);+\infty\right[$, celles de l'inéquation $t_2(x)\le 0$ sont les réels de l'intervalle $S_2=\left[\dfrac{3-\sqrt{16041}}{2}(\approx -61{,}82);x_2=\dfrac{3+\sqrt{16041}}{2}(\approx 64{,}82)\right]$. On a donc $S_1\cap S_2=[x_1;x_2]$.

Deux valeurs de n sont donc envisageables $n_1=63$ et $n_2=64$.

On sait enfin que $\dfrac{n(n+1)}{2}-2003=4p+1$. Si $n=63$, $p=3$; si $n=64$, $p=19$.

En conclusion :

- Ou bien le livre a 63 pages et les pages numérotées 6 et 7 sont collées.
- Ou bien le livre a 64 pages et les pages numérotées 38 et 39 sont collées.