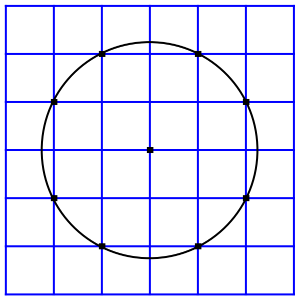
EXERCICE 4 :



René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté.

Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés au sol, tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent…

René est aussi un bricoleur soigneux et pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation. La figure ci-dessous donne un exemple de table à 8 pieds.

Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le coefficient de solidité $s=\frac{n}{d}$*. Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.*

1°) Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci-contre.

2°) Quelles sont les deux tables les plus petites ?
Préciser leurs coefficients de solidité respectifs.

3°) Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?

4°) Quelle est la table la plus solide ?

5°) René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre, exprimé en mètres est un nombre entier ?

Correction :

1°) Le diamètre de la table est $d=2\times\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{5}$ m . On a donc $s=8\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}\approx 3{,}57$.

2°) Appelons O le centre de la table et r son rayon. Un cercle de centre O et de rayon r est susceptible de représenter le dessus de la table s'il passe par les nœuds du quadrillage de maille 0,5m.

Le premier cercle a donc comme rayon 0,5m, la table T_1 associée a 4 pieds, son coefficient de solidité est $s_1 = 4/1 = 4$.

Le second cercle a comme rayon $0{,}5\times\sqrt{2}$ m, la table T_2 associée a 4 pieds, son coefficient de solidité est $s_2=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\approx 2{,}82$.

3°) Supposons que n=12. Le coefficient de solidité est $s = 12/d$. Il est donc d'autant plus grand que d est petit. A chaque point M, on associe sur le quadrillage un triangle rectangle OHM où l'on peut supposer pour des raisons de symétrie, $OH \geq HM$. Choisissons comme unité 0,5m, $a=OH$, $b=HM$ sont des entiers naturels.

Pour obtenir une table à 12 pieds il faut trouver deux triplets distincts (a_1,b_1,c) et (a_2,b_2,c) avec $b_1=0$ et $a_2>b_2$ ou $0<b_1<a_1$ et $b_2=a_2$. $c=OM=\sqrt{a^2+b^2}$ doit être minimal. Les triplets possibles, ordonnés selon les valeurs croissantes de a sont :

$$a=1:(1,0,\sqrt{1});(1,1,\sqrt{2});$$
$$a=2:(2,0,\sqrt{4});(2,1,\sqrt{5});(2,2,\sqrt{8});$$
$$a=3:(3,0,\sqrt{9});(3,1,\sqrt{10});(3,2,\sqrt{13});(3,3,\sqrt{18});$$
$$a=4:(4,0,\sqrt{16});(4,1,\sqrt{17});(4,2,\sqrt{20});(4,3,\sqrt{25});(4,4,\sqrt{32});$$
$$a=5:(5,0,\sqrt{25});\text{ au delà, les rayons sont plus grands que 5.}$$

La solution est donc la table de rayon 5 unités donc de diamètre 5m. Son coefficient de solidité est s=2,4.

4°) Avec les notations de 3°), considérons une table de rayon c unités. De l'égalité $c^2=a^2+b^2$, on déduit que $a<c$ lorsque c n'est pas entier et $a\leq c$ lorsque c est entier. Etudions les deux cas :

- Si c n'est pas entier, $a<c$ signifie que le nombre maximum de pieds par quart de table est strictement inférieur à c donc $n<4c$ et $s<4$ (l'unité représente 0,5 m).
- Si c est entier, le précédent raisonnement montre que $s \leq 4$.

Le coefficient de solidité maximal est donc 4, il est atteint par la plus petite table.

On peut évidemment se poser la question de savoir s'il existe d'autres tables de coefficient 4. On sait déjà q'une telle table a un diamètre entier et on a $a=c$ avec a-1 pieds par quart de cercle. Le triplet (a-1,1,a) est donc solution ce qui implique $a^2=(a-1)^2+1$ soit a=1. La seule table répondant à la question est donc la plus petite.

5°) Avec les mêmes notations que dans la question 3, il existe nécessairement un couple (a,a) solution au problème. En effet il doit exister 3 pieds sur chaque quart de cercle ouvert. On doit donc avoir $d = a\sqrt{2}$ mètres entier ce qui impliquerait $\sqrt{2}$ rationnel ce qui est exclu.