EXERCICE 1

Un professeur commande des livres pour n élèves de première S. Le prix d'un livre est 20€, mais l'éditeur offre un livre pour 4 achetés. On appelle p_n le prix de revient moyen de chaque livre.
1°) Présenter dans un tableau les vingt premières valeurs p_1 , p_2 ,…, p_{20} de la suite (p_n).
2°) Quelles conjectures formuleriez vous à propos de cette suite ?
3°) Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles $p_n = 16$?
4°) Explicitez p_n pour tout entier naturel n.
5°) La suite (p_n) est-elle convergente ?

Correction :

1°) On obtient facilement le tableau suivant où les valeurs de p_n sont données avec deux décimales exactes:

n	p_n	n	p_n	n	p_n	n	p_n
1	20	6	16,66	11	16,36	16	16,25
2	20	7	17,14	12	16,66	17	16,47
3	20	8	17,50	13	16,92	18	16,66
4	20	9	17,77	14	17,14	19	16,84
5	16	10	16	15	16	20	16

2°) On peut émettre, entre autres, les conjectures suivantes:

- $p_n = 16$ lorsque n est multiple de 5.
- Les suites (p_{5k+1}), (p_{5k+2}) (p_{5k+3}) (p_{5k+4}) sont décroissantes.
- $p_{5k+1} < p_{5k+2} < p_{5k+3} < p_{5k+4}$ pour tout entier naturel k.
- (p_n) converge vers 16 comme d'ailleurs les suites extraites (p_{5k+1}), (p_{5k+2}), (p_{5k+3}), (p_{5k+4}) (p_{5k}).

On se propose, dans les questions qui viennent, de prouver certaines de ces conjectures.

3°) et 4°) Si $n=5k$, on paye $4k$ livres et l'éditeur offre k livres. Le prix payé est donc $80k$€ et le prix de revient moyen est bien 16€.

Le nombre de livres offerts reste égal à k lorsque $n=5k+r$ où $r=1,2,3,4$. On a donc $p_n= 20\,\dfrac{4k+r}{5k+r}$ qu'il est commode de mettre sous la forme : $p_n = 16 + \dfrac{4r}{n}$. Cette formule donne la forme explicite de p_n et prouve en outre que l'équation $p_n=16$ n'a pas d'autre solution que $n=5k$.

5°) La suite (p_n) converge vers 16 comme on pouvait s'y attendre.

Compléments : Il est intéressant de constater :

- Que $\dfrac{n}{4}(p_n - 16)$ converge vers r .
- Que la suite (p_{5k+r}) pour r fixé est décroissante : en effet :

$$p_{5(k+1)+r} - p_{5k+r} = \frac{-20r}{(5(k+1)+r)(5k+r)} < 0 .$$

Chacune de ces suites extraites converge évidemment vers 16.

EXERCICE 2

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan tels que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD, ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y. C'est par exemple le cas lorsque ABCD est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1°) Etude du cas « 1,5 » où l'une des distance est égale à x et les cinq autres à y.
Montrez qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessinez cette configuration
2°) Etude du cas « 2,4 » où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y.
a) On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun. Quelle configuration obtient-on ? Dessinez là
b) Que se passe t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?
3°) Etudiez le cas « 3,3 » .

Correction :

1°) Le cas « 1,5 ». Supposons que *AB*=*x*. On a donc *AC* = *AD* = *BC* = *BD* = *CD* = *y*. Les triangles *ACD* et *BCD* sont équilatéraux. On obtient une seule configuration puisque A≠B. (*fig1*).

2°) Le cas « 2,4 ».

a) Posons *AB*=*CD* =*x*. On a donc *AC, AD, BC, BD*=*y*. Le quadrilatère cherché est un losange dont les diagonales ont même longueur, c'est le carré donné en exemple.

b) Posons *AB*=*AC*=*x*. On a donc *AD*, *BC*, *BD*, *CD*=*y*. Le triangle *BCD* est equilateral, *A* est à l'intersection de la médiatrice de [*BC*] et du cercle de centre *D* et de rayon *y*. On a donc deux configurations : *fig*2 et *fig*3 .

3°) Le cas « 3 ,3 ».

a) Les trois segments de longueur *x* sont disposés en étoile, par exemple *AB*=*AC*=*AD*=*x*. On a donc *BC*=*BD*=*CD*=*y*. Le triangle *BCD* est équilatéral et *A* est le centre de ce triangle : *fig4.*

b) Si les trois segments de longueur *x* forment un triangle équilatéral, on retrouve la précédente configuration.

c) Il reste le cas où les trois segments de longueur *x* forment une chaîne ouverte . Posons *AB*=*BC*=*CD*=*x*. On a donc *AC*=*AD*=*BD*=*y*. Les triangles *BDA*, *ADC*, *ABC* et *BCD* sont isocèles . Appelons *O* le point d'intersection des segments [*BD*] et [*AC*]. Les triangles *BDA* et *ADC* d'une part , *ABC* et *BCD* d'autre part sont isométriques (3ème cas). Les angles *CAD* et *BAD* d'une part, *DBC* et *ACB* d'autre part sont égaux . Puisque les angles *BOC* et *AOB* sont opposés par le sommet, ils sont égaux ce qui entraîne l'égalité des quatre angles précédents et le parallélisme des droites (*BC*) et (*AD*). La configuration cherchée est un trapèze isocèle : *fig5.*

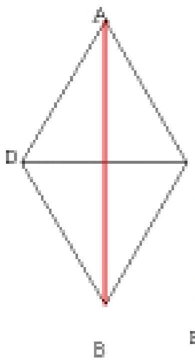


Fig 1

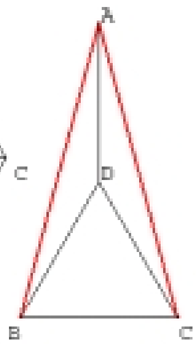


Fig 2

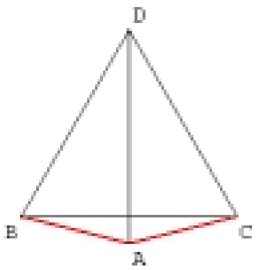


Fig 3

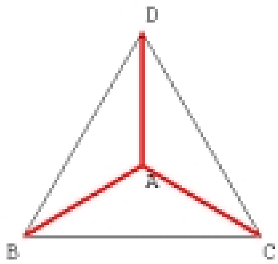


Fig 4

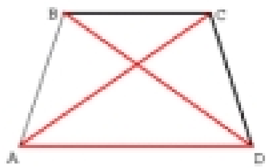


Fig 5

EXERCICE 3 :

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n. (On rappelle que la page 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003, mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.
Quel est le nombre de pages du livre et quels sont les numéros des pages collées ?

Correction :

Les pages collées portent deux numéros consécutifs qu'on peut appeler 2*p* et 2*p*+1 puisque les numéros des pages de gauche sont pairs.

Le livre comporte *n* pages, la somme des *n* premiers entiers naturels est donnée par la formule $S=\frac{n(n+1)}{2}$. On a donc $\frac{n(n+1)}{2}-2003=4p+1$ soit encore $n^2+n-4008=8p$.

On sait par ailleurs que $2\le 2p\le n$ donc $8\le 8p\le 4n$, les valeurs de *n* possibles sont donc les solutions entières du système d'inéquations : $\begin{cases} n^2+n-4016\ge 0\\ n^2-3n-4008\le 0\end{cases}$.

Posons pour *x* réel, $t_1(x)=x^2+x-4016$ et $t_2(x)=x^2-3x-4008$. Les discriminants associés sont respectivement $\Delta_1=16065$ et $\Delta_2=16041$. Les solutions de l'inéquation $t_1(x)\ge 0$ sont les réels de l'ensemble $S_1=\left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{16065}}{2}(\approx -63{,}87)\right]\cup\left[x_1=\frac{-1+\sqrt{16065}}{2}(\approx 62{,}87);+\infty\right[$, celles de l'inéquation $t_2(x)\le 0$ sont les réels de l'intervalle $S_2 = \left[\frac{3-\sqrt{16041}}{2}(\approx -61{,}82)\,;\, x_2 = \frac{3+\sqrt{16041}}{2}(\approx 64{,}82)\right]$. On a donc $S_1 \cap S_2 = [x_1\,;x_2]$.

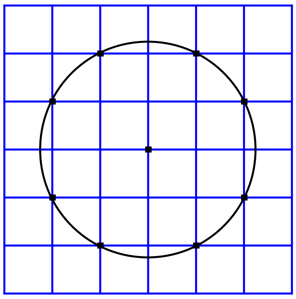
Deux valeurs de n sont donc envisageables n_1=63 et n_2=64.

On sait enfin que $\frac{n(n+1)}{2} - 2003 = 4p+1$. Si n=63, p=3 ; si n=64, p=19.

En conclusion :

- Ou bien le livre a 63 pages et les pages numérotées 6 et 7 sont collées.
- Ou bien le livre a 64 pages et les pages numérotées 38 et 39 sont collées.

EXERCICE 4 :



René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté.

Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés au sol, tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent…

René est aussi un bricoleur soigneux et pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation. La figure ci-dessous donne un exemple de table à 8 pieds.

Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le coefficient de solidité $s = \frac{n}{d}$. *Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.*

1°) Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci-contre.

2°) Quelles sont les deux tables les plus petites ?
Préciser leurs coefficients de solidité respectifs.

3°) Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?

4°) Quelle est la table la plus solide ?

5°) René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre, exprimé en mètres est un nombre entier ?

Correction :

1°) Le diamètre de la table est $d = 2\times\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{5}$ m . On a donc $s = 8\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}57$.

2°) Appelons O le centre de la table et r son rayon. Un cercle de centre O et de rayon r est susceptible de représenter le dessus de la table s'il passe par les nœuds du quadrillage de maille 0,5m.

Le premier cercle a donc comme rayon 0,5m, la table T_1 associée a 4 pieds, son coefficient de solidité est s_1 = 4/1= 4.

Le second cercle a comme rayon $0{,}5\times\sqrt{2}$ m, la table T_2 associée a 4 pieds, son coefficient de solidité est $s_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$.

3°) Supposons que n=12. Le coefficient de solidité est s = 12/d. Il est donc d'autant plus grand que d est petit. A chaque point M, on associe sur le quadrillage un triangle rectangle OHM où l'on peut supposer pour des raisons de symétrie, $OH \geq HM$. Choisissons comme unité 0,5m, a=OH , b=HM sont des entiers naturels.

Pour obtenir une table à 12 pieds il faut trouver deux triplets distincts (a_1,b_1,c) et (a_2,b_2,c) avec b_1=0 et a_2>b_2 ou 0<b_1<a_1 et b_2=a_2 . $c = OM = \sqrt{a^2+b^2}$ doit être minimal. Les triplets possibles, ordonnés selon les valeurs croissantes de a sont :

$a=1:(1,0,\sqrt{1});(1,1,\sqrt{2});$

$a=2:(2,0,\sqrt{4});(2,1,\sqrt{5});(2,2,\sqrt{8});$

$a=3:(3,0,\sqrt{9});(3,1,\sqrt{10});(3,2,\sqrt{13});(3,3,\sqrt{18});$

$a=4:(4,0,\sqrt{16});(4,1,\sqrt{17});(4,2,\sqrt{20});(4,3,\sqrt{25});(4,4,\sqrt{32});$

$a=5:(5,0,\sqrt{25})$; au delà, les rayons sont plus grands que 5.

La solution est donc la table de rayon 5 unités donc de diamètre 5m. Son coefficient de solidité est s=2,4.

4°) Avec les notations de 3°), considérons une table de rayon c unités. De l'égalité $c^2=a^2+b^2$, on déduit que $a<c$ lorsque c n'est pas entier et $a\leq c$ lorsque c est entier. Etudions les deux cas :

- Si c n'est pas entier, $a<c$ signifie que le nombre maximum de pieds par quart de table est strictement inférieur à c donc $n<4c$ et $s<4$ (l'unité représente 0,5 m).
- Si c est entier, le précédent raisonnement montre que $s\leq 4$.

Le coefficient de solidité maximal est donc 4, il est atteint par la plus petite table.

On peut évidemment se poser la question de savoir s'il existe d'autres tables de coefficient 4. On sait déjà q'une telle table a un diamètre entier et on a $a=c$ avec a-1 pieds par quart de cercle. Le triplet (a-1,1,a) est donc solution ce qui implique $a^2=(a-1)^2+1$ soit a=1. La seule table répondant à la question est donc la plus petite.

5°) Avec les mêmes notations que dans la question 3, il existe nécessairement un couple (a,a) solution au problème. En effet il doit exister 3 pieds sur chaque quart de cercle ouvert. On doit donc avoir $d=a\sqrt{2}$ mètres entier ce qui impliquerait $\sqrt{2}$ rationnel ce qui est exclu.