OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2003

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 :

Un professeur commande des livres pour n élèves de première S. Le prix d'un livre est 20 euros, mais l'éditeur offre un livre pour 4 livres achetés. On appelle p_n le prix de revient moyen de chaque livre.

1°) Présenter dans un tableau les vingt premières valeurs p_1 , p_2 ,…, p_{20} de la suite (p_n).
2°) Quelles conjectures formuleriez-vous à propos de cette suite ?
3°) Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles $p_n = 16$?
4°) Exprimer p_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geq 1$.
5°) La suite (p_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 2 :

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan tels que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD, ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y. C'est par exemple le cas lorsque $ABCD$ est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1°) Etude du cas « 1-5 » où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y, ($x \neq y$).
Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question.
Dessiner cette configuration.
2°) Etude du cas « 2-4 » où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y, ($x \neq y$).
On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun.
Quelle configuration obtient-on ? La dessiner.
Que se passe t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?
3°) Etudier le cas « 3-3 » .

EXERCICE 3 :

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n. (On rappelle que la page 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003, mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.

Quel est le nombre de pages du livre et quels sont les numéros des pages collées ?

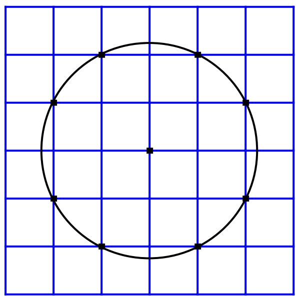
EXERCICE 4 :

René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté.

Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés au sol, tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent…

René est aussi un bricoleur soigneux et pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation. La figure ci-dessous donne un exemple de table à 8 pieds.



Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le *coefficient de solidité* $s = \frac{n}{d}$. Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

1°) Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci-contre.

2°) Quelles sont les deux tables les plus petites ?
Préciser leurs coefficients de solidité respectifs.

3°) Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?

4°) Quelle est la table la plus solide ?

5°) René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre, exprimé en mètres est un nombre entier ?