OLYMPIADES 2004
Correction

EXERCICE 1

> *Sur la planète « Mathématic », les années ont toujours 365 jours et les mois ne peuvent avoir que 28, 30 ou 31 jours.*
>
> *1°) Montrer qu'une année « Mathématicienne » comporte toujours douze mois.*
> *2°) Donner toutes les compositions possibles d'une telle année en nombre de mois de 28, 30 et 31 jours.*

Correction :

1°) Supposons qu'il existe une année à 11 mois, elle ne pourrait comporter qu'au plus 11×31=341 jours ce qui est exclu donc une année mathématicienne comporte au moins 12 mois.

Supposons alors qu'elle en comporte 13, elle aura au moins 13×28=364 jours ce qui nécessite qu'un mois ait plus de 28 jours. Il faut donc un moins de 30 jours, mais dans ce cas l'année comporte 366 jours ce qui est exclu. Bien entendu il ne peut pas y avoir plus de 13 mois.

Si une année mathématicienne existe, elle comporte 12 mois.

2°) Appelons a le nombre de mois de 28 jours, b le nombre de mois de 30 jours et c le nombre de mois de 31 jours. Le triplet d'entiers naturels (a,b,c) est donc solution du système :

$$\begin{cases} 28a+30b+31c=365 \\ a+b+c=12 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=\dfrac{c-5}{2} \\ b=\dfrac{29-3c}{2} \end{cases} \text{ d'où les conditions sur } c : \begin{cases} c \geq 5 \\ c \leq \dfrac{29}{3} < 10 \\ c \text{ impair} \end{cases}$$

On obtient finalement trois triplets solutions : (0,7,5) ; (1,4,7) ; (2,1,9) . La vérification est immédiate.