OLYMPIADES 2004
Correction

EXERCICE 2.

On définit pour chaque couple de réels (a ; b) la fonction f par $f(x) = a - \sqrt{x+b}$.
Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a ;b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ *et* $f(v) = u$.
1°) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2°) Peut-on en dire autant de 4 et de 7 ?
3°) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?

Correction :

1°) 2 et 3 sont échangeables s'il existe au moins un couple (a,b) de réels tels que $\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$ ce système équivaut au système : $\begin{cases} a - \sqrt{2+b} = 3 \\ a - \sqrt{3+b} = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a - 3 = \sqrt{2+b} \\ a - 2 = \sqrt{3+b} \end{cases}$ en élevant au carré, on obtient le système équivalent : $\begin{cases} a \geq 3 \\ 2 + b = a^2 - 6a + 9 \\ 3 + b = a^2 - 4a + 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$. La fonction cherchée est unique et est définie par $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.

2°) 4 et 7 ne sont pas échangeables car les mêmes calculs conduisent aux deux résultats contradictoires : $a \geq 7$ et $a = 6$.

3°) Supposons donc u et v échangeables et posons par exemple $u > v$ donc puisqu'il s'agit d'entiers $u \geq v+1$.
La double égalité conduit aux systèmes successifs suivants :
$\begin{cases} a - v = \sqrt{u+b} \\ a - u = \sqrt{v+b} \end{cases}$ soit $\begin{cases} a \geq u \\ u + b = a^2 - 2av + v^2 \\ v + b = a^2 - 2au + u^2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a \geq u \\ 2a - (u+v) = 1 \\ v + b = (a-u)^2 \end{cases}$ on obtient donc finalement $\begin{cases} a = \dfrac{1+u+v}{2} \\ b = (a-u)^2 - v \end{cases}$
sous réserve que l'on ait à la fois $a \geq u$ soit $u \leq v+1$ et compte tenu des hypothèses $u \geq v+1$
a et b existe donc à condition que $u = v+1$ c'est-à-dire si u et v sont consécutifs. C'était le cas pour 2 et 3 mais pas pour 4 et 7.

La condition trouvée est par ailleurs suffisante donc on peut énoncer que *u* et *v* sont échangeables si et seulement s'ils sont consécutifs et dans ce cas la fonction est unique.