OLYMPIADES 2004
Correction

EXERCICE 1

> *Sur la planète « Mathématic », les années ont toujours 365 jours et les mois ne peuvent avoir que 28, 30 ou 31 jours.*
>
> *1°) Montrer qu'une année « Mathématicienne » comporte toujours douze mois.*
> *2°) Donner toutes les compositions possibles d'une telle année en nombre de mois de 28, 30 et 31 jours.*

Correction :

1°) Supposons qu'il existe une année à 11 mois, elle ne pourrait comporter qu'au plus 11×31=341 jours ce qui est exclu donc une année mathématicienne comporte au moins 12 mois.

Supposons alors qu'elle en comporte 13, elle aura au moins 13×28=364 jours ce qui nécessite qu'un mois ait plus de 28 jours. Il faut donc un moins de 30 jours, mais dans ce cas l'année comporte 366 jours ce qui est exclu. Bien entendu il ne peut pas y avoir plus de 13 mois.

Si une année mathématicienne existe, elle comporte 12 mois.

2°) Appelons a le nombre de mois de 28 jours, b le nombre de mois de 30 jours et c le nombre de mois de 31 jours. Le triplet d'entiers naturels (a,b,c) est donc solution du système :

$$\begin{cases} 28a+30b+31c=365 \\ a+b+c=12 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a=\dfrac{c-5}{2} \\ b=\dfrac{29-3c}{2} \end{cases} \quad \text{d'où les conditions sur } c : \begin{cases} c \geq 5 \\ c \leq \dfrac{29}{3} < 10 \\ c \text{ impair} \end{cases}$$

On obtient finalement trois triplets solutions : (0,7,5) ; (1,4,7) ; (2,1,9) . La vérification est immédiate.

EXERCICE 2.

> *On définit pour chaque couple de réels (a ; b) la fonction f par* $f(x)=a-\sqrt{x+b}$.
> *Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a ;b) tel que la fonction f vérifie à la fois* $f(u)=v$ et $f(v)=u$.
> *1°) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.*
> *2°) Peut-on en dire autant de 4 et de 7 ?*
> *3°) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?*

Correction :

1°) 2 et 3 sont échangeables s'il existe au moins un couple (a,b) de réels tels que $\begin{cases} f(2)=3 \\ f(3)=2 \end{cases}$ ce système

équivaut au système : $\begin{cases} a-\sqrt{2+b}=3 \\ a-\sqrt{3+b}=2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a-3=\sqrt{2+b} \\ a-2=\sqrt{3+b} \end{cases}$ en élevant au carré, on obtient le système équivalent :

$\begin{cases} a \geq 3 \\ 2+b=a^2-6a+9 \\ 3+b=a^2-4a+4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$. La fonction cherchée est unique et est définie par $f(x)=3-\sqrt{x-2}$.

2°) 4 et 7 ne sont pas échangeables car les mêmes calculs conduisent aux deux résultats contradictoires : $a \geq 7$ et $a=6$.

3°) Supposons donc u et v échangeables et posons par exemple $u>v$ donc puisqu'il s'agit d'entiers $u \geq v+1$. La double égalité conduit aux systèmes successifs suivants :

$\begin{cases} a-v=\sqrt{u+b} \\ a-u=\sqrt{v+b} \end{cases}$ soit $\begin{cases} a \geq u \\ u+b=a^2-2av+v^2 \\ v+b=a^2-2au+u^2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a \geq u \\ 2a-(u+v)=1 \\ v+b=(a-u)^2 \end{cases}$ on obtient donc finalement $\begin{cases} a=\dfrac{1+u+v}{2} \\ b=(a-u)^2-v \end{cases}$

sous réserve que l'on ait à la fois $a \geq u$ soit $u \leq v+1$ et compte tenu des hypothèses $u \geq v+1$

a et b existe donc à condition que $u=v+1$ c'est-à-dire si u et v sont consécutifs. C'était le cas pour 2 et 3 mais pas pour 4 et 7.

La condition trouvée est par ailleurs suffisante donc on peut énoncer que *u* et *v* sont échangeables si et seulement s'ils sont consécutifs et dans ce cas la fonction est unique.

<u>EXERCICE 3.</u>

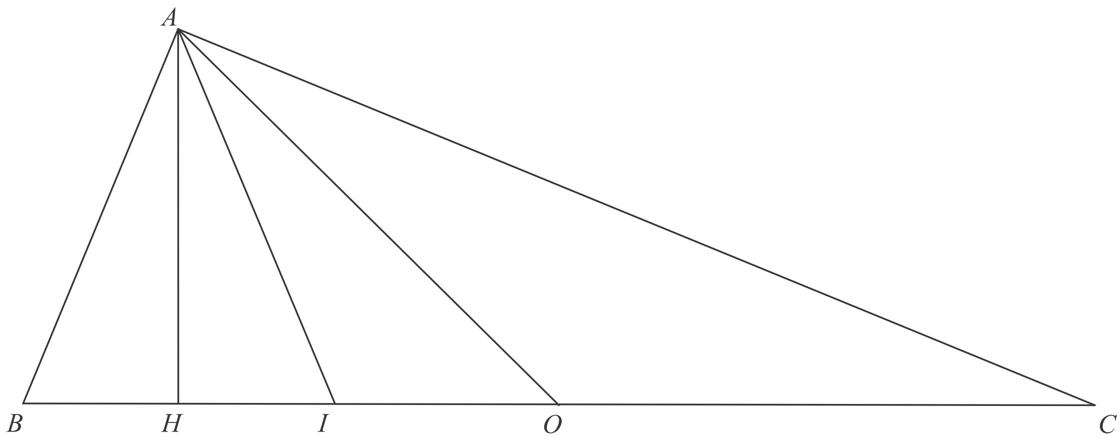
Dans cet exercice, on utilisera sans démonstration le résultat suivant :

Dans tout triangle ABC, $\dfrac{BC}{\sin\hat{A}} = \dfrac{AB}{\sin\hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin\hat{B}}$

Dans un triangle ABC, la hauteur, la bissectrice et la médiane relatives au sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ *en quatre angles de même mesure* α.

1°) Exprimer en fonction de α*, les mesures de tous les angles de la figure.*

2°) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?



Correction .

1°) Par hypothèse, $\widehat{BAH} = \widehat{HAI} = \widehat{IAO} = \widehat{OAC} = \alpha$. (On remarque au passage que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$)

(AH) est la hauteur issue de A donc $\widehat{ABH} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$; c'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAI}$ donc le triangle BAI est isocèle et $\widehat{BAI} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. On en déduit que $\widehat{OAI} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ et que $\widehat{IOA} = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. On obtient enfin de la même manière $\widehat{AOC} = \dfrac{\pi}{2} + 2\alpha$ et $\widehat{OCA} = \dfrac{\pi}{2} - 3\alpha$.

2°) Dans les calculs précédents, le fait que (AO) soit une médiane n'a pas été utilisé, nous appliquons donc la formule donnée en exergue dans les triangles AOC et AOB, nous obtenons :

$$\frac{OC}{\sin\alpha} = \frac{OA}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)} \quad \text{et} \quad \frac{OB}{\sin 3\alpha} = \frac{OA}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Comme $OB = OC$, on voit que α est solution de l'équation $\sin\alpha\cos\alpha = \sin 3\alpha\cos 3\alpha$ qui s'écrit aussi

$$\sin 2\alpha = \sin 6\alpha .$$

Cette dernière équation admet dans l'ensemble des nombres réels deux familles de solutions du type :

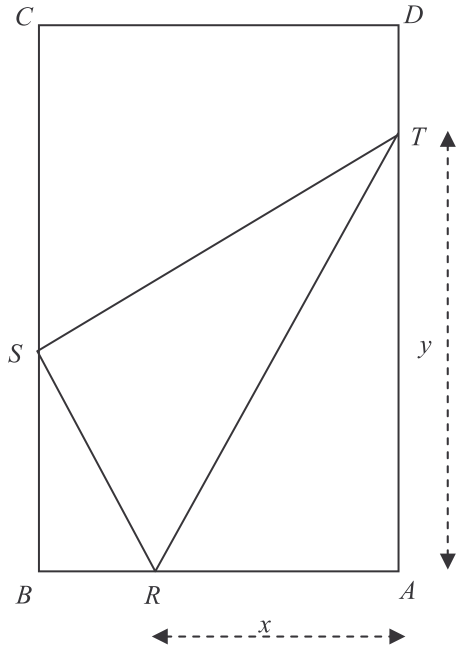
$6\alpha = 2\alpha + 2k\pi$ ou $6\alpha = \pi - 2\alpha + 2k\pi$ soit $\alpha = k\dfrac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$ où k désigne un entier relatif.

Compte tenu de la condition $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, la seule solution acceptable est $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$.

Le triangle ABC est donc rectangle en A, $\widehat{ABC} = \frac{3\pi}{8}$ et $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 4.

Soit ABCD une feuille de papier rectangulaire de largeur AB = 4 et de longueur BC = 6. Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-contre.
Dans tout l'exercice on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).
On pose AR = x, AT = y.
1°) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
2°) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur [BC].
3°)Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle STR) est minimale.
4°)Quelle est alors la nature du triangle AST ?



Correction :

1°) La valeur maximale de x est évidemment x=4, dans ce cas on aura aussi y=4. Pour que S existe, il est nécessaire que AS soit supérieur à 4, or d'après l'inégalité triangulaire, $AS \leq 2x$ donc $x \geq 2$. Il faut encore que T appartienne au segment [AD] donc la valeur minimale de x est obtenue lorsque T est en D.

Dans le cas général, appelons α l'angle $\widehat{ART}$ et β l'angle $\widehat{RTA} = \widehat{BAS}$ puisque (RT) est la médiatrice de [AS]. Evaluons donc tanβ de deux manières. Dans le triangle RTA d'une part et dans le triangle SAB d'autre part. On obtient ainsi $\frac{AR}{AT} = \frac{SB}{AT}$ soit $\frac{x}{y} = \frac{SB}{4}$

Dans le cas particulier où T=D, on a y=6 et d'après le théorème de Pythagore, $SB = 6 - \sqrt{20}$. On obtient ainsi la valeur minimale $x = 9 - 3\sqrt{5}$.

2°) La relationprécédemment établie permet de déterminer une relation entre x et y puique

$BR = 4 - x$ et que $SR = x \cdot SB^2 = x^2 - (4-x)^2 = 8x - 16$ et $SB = 2\sqrt{2x-4}$.

On en déduit donc que $y = \frac{2x}{\sqrt{2x-4}}$.

3°) L'aire de RST est $\frac{1}{2}xy = \frac{x^2}{\sqrt{2x-4}}$. Appelons f cette fonction, elle est dérivable sur l'intervalle

$I = \left[9 - 3\sqrt{5}\ , 4\right]$ et sur cet intervalle $f'(x) = \frac{2x\sqrt{2x-4} - x^2 \times \frac{2}{2\sqrt{2x-4}}}{2x-4} = \frac{x(3x-8)}{(2x-4)\sqrt{2x-4}}$.

Puisque $\frac{8}{3}$ est bien élément de I, il est clair que f est minimale pour $x = \frac{8}{3}$.

La valeur minimale de l'aire est du triangle RST est $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{3} - 4}} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$.

Notons que dans ce cas, $\tan \beta = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ce qui signifie que le triangle RST est équilatéral.