OLYMPIADES 2004
Correction

EXERCICE 3.

Dans cet exercice, on utilisera sans démonstration le résultat suivant :

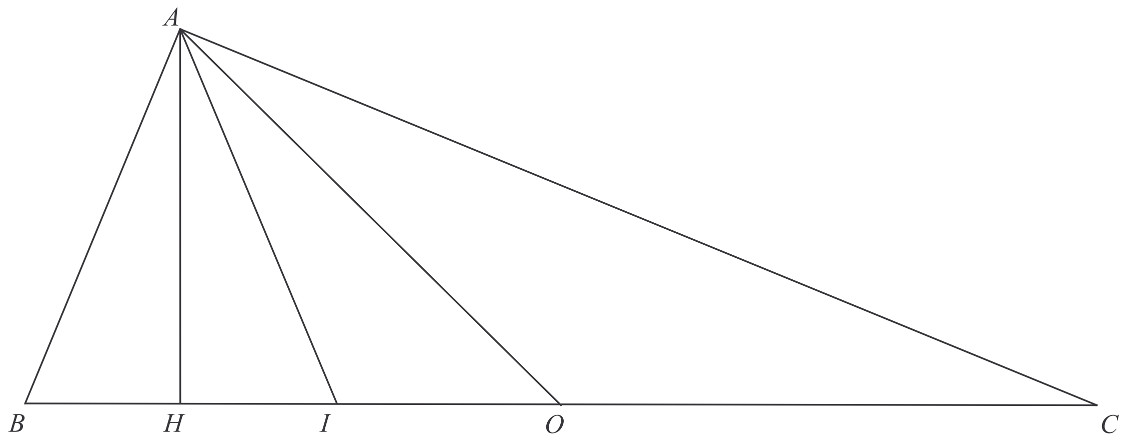
$$\text{Dans tout triangle } ABC,\ \frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}}$$

Dans un triangle ABC, la hauteur, la bissectrice et la médiane relatives au sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure α.

1°) Exprimer en fonction de α, les mesures de tous les angles de la figure.

2°) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?

Correction .



1°) Par hypothèse, $\widehat{BAH} = \widehat{HAI} = \widehat{IAO} = \widehat{OAC} = \alpha$. (On remarque au passage que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$)

(AH) est la hauteur issue de A donc $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{2} - \alpha$; c'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAI}$ donc le triangle BAI est isocèle et $\widehat{BAI} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. On en déduit que $\widehat{OAI} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et que $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. On obtient enfin de la même manière $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$ et $\widehat{OCA} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$.

2°) Dans les calculs précédents, le fait que (AO) soit une médiane n'a pas été utilisé, nous appliquons donc la formule donnée en exergue dans les triangles AOC et AOB, nous obtenons :

$$\frac{OC}{\sin\alpha} = \frac{OA}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)} \quad \text{et} \quad \frac{OB}{\sin 3\alpha} = \frac{OA}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Comme $OB = OC$, on voit que α est solution de l'équation $\sin\alpha\cos\alpha = \sin 3\alpha \cos 3\alpha$ qui s'écrit aussi

$$\sin 2\alpha = \sin 6\alpha .$$

Cette dernière équation admet dans l'ensemble des nombres réels deux familles de solutions du type :

$6\alpha = 2\alpha + 2k\pi$ ou $6\alpha = \pi - 2\alpha + 2k\pi$ soit $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ où k désigne un entier relatif.

Compte tenu de la condition $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, la seule solution acceptable est $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Le triangle ABC est donc rectangle en A, $\widehat{ABC} = \frac{3\pi}{8}$ et $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{8}$.