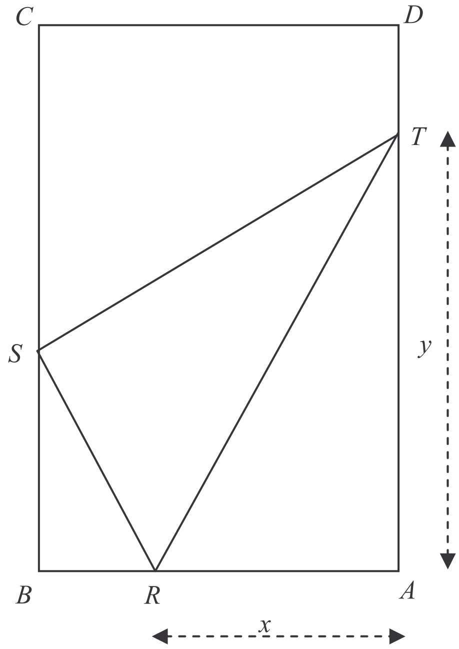
OLYMPIADES 2004
Correction

EXERCICE 4.

Soit ABCD une feuille de papier rectangulaire de largeur AB = 4 et de longueur BC = 6. Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-contre.
Dans tout l'exercice on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).
On pose AR = x, AT = y.
1°) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
2°) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur [BC].
3°)Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle STR) est minimale.
4°)Quelle est alors la nature du triangle AST ?



Correction :

1°) La valeur maximale de x est évidemment x=4, dans ce cas on aura aussi y=4. Pour que S existe, il est nécessaire que AS soit supérieur à 4, or d'après l'inégalité triangulaire, $AS \leq 2x$ donc $x \geq 2$. Il faut encore que T appartienne au segment [AD] donc la valeur minimale de x est obtenue lorsque T est en D.

Dans le cas général, appelons α l'angle $\widehat{ART}$ et β l'angle $\widehat{RTA} = \widehat{BAS}$ puisque (RT) est la médiatrice de [AS]. Evaluons donc tanβ de deux manières. Dans le triangle RTA d'une part et dans le triangle SAB d'autre part. On obtient ainsi $\dfrac{AR}{AT} = \dfrac{SB}{AT}$ soit $\dfrac{x}{y} = \dfrac{SB}{4}$

Dans le cas particulier où T=D, on a y=6 et d'après le théorème de Pythagore, $SB = 6 - \sqrt{20}$. On obtient ainsi la valeur minimale $x = 9 - 3\sqrt{5}$.

2°) La relationprécédemment établie permet de déterminer une relation entre x et y puique

$BR = 4 - x$ et que $SR = x \cdot SB^2 = x^2 - (4-x)^2 = 8x - 16$ et $SB = 2\sqrt{2x-4}$.

On en déduit donc que $y = \dfrac{2x}{\sqrt{2x-4}}$.

3°) L'aire de RST est $\dfrac{1}{2}xy = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x-4}}$. Appelons f cette fonction, elle est dérivable sur l'intervalle

$I = \left[9 - 3\sqrt{5}\ , 4\right]$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{2x-4} - x^2 \times \dfrac{2}{2\sqrt{2x-4}}}{2x-4} = \dfrac{x(3x-8)}{(2x-4)\sqrt{2x-4}}$.

Puisque $\dfrac{8}{3}$ est bien élément de I, il est clair que f est minimale pour $x = \dfrac{8}{3}$.

La valeur minimale de l'aire est du triangle RST est $f\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{64}{9} \times \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{16}{3} - 4}} = \dfrac{32}{3\sqrt{3}}$.

Notons que dans ce cas, $\tan\beta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ce qui signifie que le triangle RST est équilatéral.