OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2004

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1.

Sur la planète « *Mathématic* », les années ont toujours 365 jours et les mois ne peuvent avoir que 28, 30 ou 31 jours.

1) Montrer qu'une année « *Mathématicienne* » comporte toujours douze mois.
2) Donner toutes les compositions possibles d'une telle année en nombre de mois de 28, 30 et 31 jours.

EXERCICE 2.

On définit pour chaque couple de réels (a ; b) la fonction f par $f(x) = a - \sqrt{x+b}$.

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a ;b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1) Montrer que 2 et 3 sont *échangeables*.
2) Peut-on en dire autant de 4 et de 7 ?
3) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils *échangeables* ?

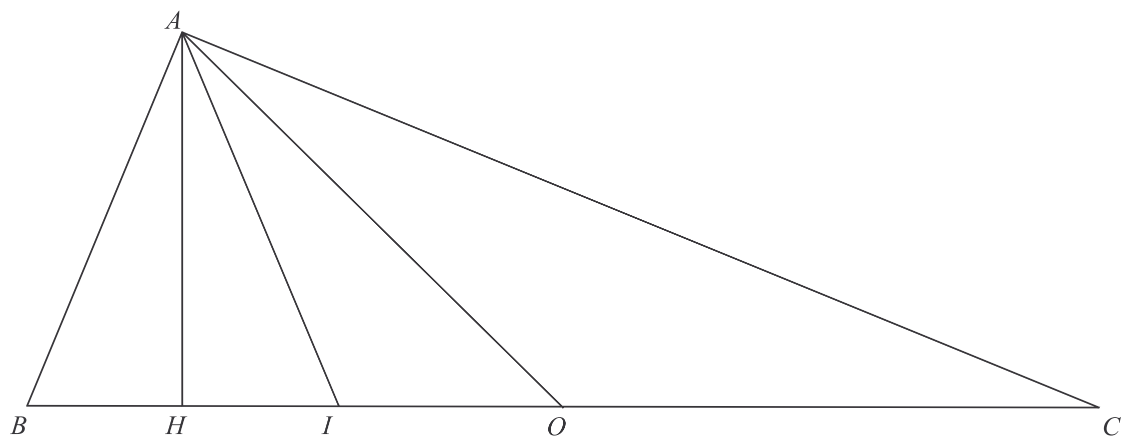
EXERCICE 3.

Dans cet exercice, on utilisera sans démonstration le résultat suivant :

Dans tout triangle ABC, $\dfrac{BC}{\sin \hat{A}} = \dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}}$

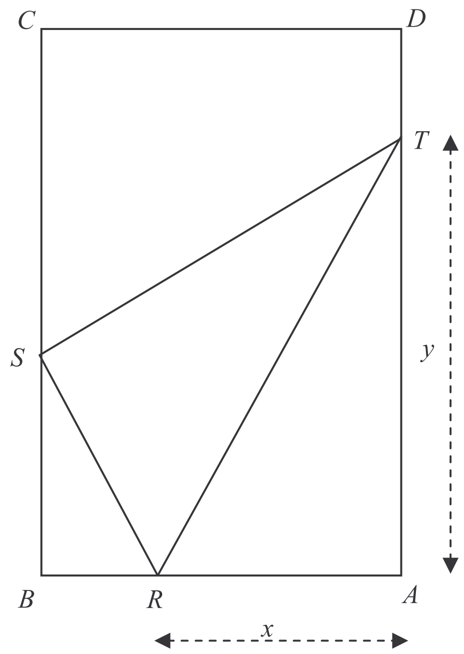
Dans un triangle ABC, la hauteur, la bissectrice et la médiane relatives au sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure α.

1) Exprimer en fonction de α, les mesures de tous les angles de la figure.
2) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?



EXERCICE 4.

Soit $ABCD$ une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-contre.



Dans tout l'exercice on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$, $AT = y$.

1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
2) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.
3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle STR) est minimale.
4) Quelle est alors la nature du triangle AST ?