OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2005 ; CORRIGE

<u>EXERCICE 2. Aiguilles</u>

1°) a) Lorsque la grande aiguille « *avance* » d'une angle de θ degrés , la petite aiguille « *avance* » d'un angle de $\frac{\theta}{12}$ degrés. La première superposition aura donc lieu lorsque $\frac{\theta}{12}+360=\theta$. On obtient $\theta=\frac{12}{11}\times 360$ **.** Les deux aiguilles sont donc superposées lorsque l'écart angulaire avec la verticale est de $\frac{360}{11}$ de degrés. Or en 10 secondes, la grande aiguille « *avance* » de 1 degré et l'écart trouvé correspond à $\frac{3600}{11}$ secondes soit 5′ 27″. Il est donc $1^h5' \, 27''$

b) Pour la seconde coïncidence, il suffit d'écrire $\frac{\theta}{12}+720=\theta$, on trouve $t_2 \approx 2^h 10'55''$

c) Plus généralement, l'équation $\frac{\theta}{12}+k\times 360=\theta$ conduit à $\theta=360\times\frac{12k}{11}$, l'écart avec la verticale est donc de $\frac{360k}{11}$ degrés ce qui permet de trouver toutes les coïncidences entre minuit et midi :, $t_3 \approx 3^h 16'22''$, $t_4 \approx 4^h 21'49''$, $t_5 \approx 5^h 27'16''$, $t_6 \approx 6^h 32'44''$, $t_7 \approx 7^h 38'11''$, $t_8 \approx 8^h 43'38''$, $t_9 \approx 9^h 49'05''$, $t_{10} \approx 10^h 54'33''$, $t_{11} = 12^h$.

2°) A 10 h, l'angle aigu formé par les deux aiguilles mesure 60°. On cherche donc θ, tel que $60-\frac{\theta}{12}=\theta$ soit $\theta=\frac{720}{13}$ degré soit un temps de $\frac{2}{13}$ h , soit environ $9'14''$. Dans cette configuration il est environ $10^h 9'14''$