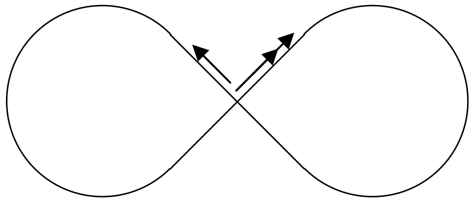
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2005 ; CORRIGE

EXERCICE 1. Le lièvre et la tortue.



Le lièvre se déplace 363 fois plus vite que la tortue. Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 moitiés de circuit, c'est-à-dire 181 « tours complets » et un demi circuit, à l'issue duquel les deux animaux se croisent. Le lièvre a donc dépassé 181 fois la tortue (à chaque passage sur une boucle de rang pair de son parcours), et l'a croisée une fois au carrefour : ce premier demi circuit de la tortue génère donc 182 « dépassements ou croisements ».

Au second demi circuit effectué par la tortue, le même raisonnement s'applique (la position initiale étant comptabilisée dans le décompte précédent), et ainsi de suite. Ainsi, chaque demi circuit effectué par la tortue génère 182 rencontres, dont 181 dépassements et un seul croisement à la fin. Or $2005 = 11 \times 182 + 3$, donc pour 2005 « croisements ou dépassements », la tortue aura parcouru 11 moitiés de circuit, qui auront généré 11 croisements.

EXERCICE 2. Aiguilles

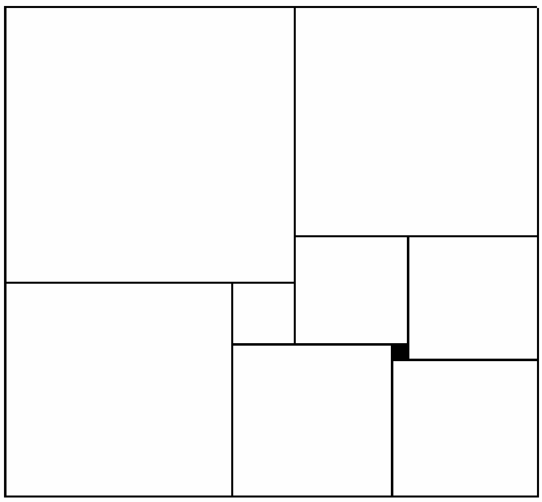
1°) a) Lorsque la grande aiguille « *avance* » d'une angle de θ degrés , la petite aiguille « *avance* » d'un angle de $\frac{\theta}{12}$ degrés. La première superposition aura donc lieu lorsque $\frac{\theta}{12} + 360 = \theta$. On obtient $\theta = \frac{12}{11} \times 360$ **.** Les deux aiguilles sont donc superposées lorsque l'écart angulaire avec la verticale est de $\frac{360}{11}$ de degrés. Or en 10 secondes, la grande aiguille « *avance* » de 1 degré et l'écart trouvé correspond à $\frac{3600}{11}$ secondes soit $5' \, 27''$. Il est donc $1^h 5' \, 27''$

b) Pour la seconde coïncidence, il suffit d'écrire $\frac{\theta}{12} + 720 = \theta$, on trouve $t_2 \approx 2^h 10'55''$

c) Plus généralement, l'équation $\frac{\theta}{12} + k \times 360 = \theta$ conduit à $\theta = 360 \times \frac{12k}{11}$, l'écart avec la verticale est donc de $\frac{360k}{11}$ degrés ce qui permet de trouver toutes les coïncidences entre minuit et midi :, $t_3 \approx 3^h 16'22''$, $t_4 \approx 4^h 21'49''$, $t_5 \approx 5^h 27'16''$, $t_6 \approx 6^h 32'44''$, $t_7 \approx 7^h 38'11''$, $t_8 \approx 8^h 43'38''$, $t_9 \approx 9^h 49'05''$, $t_{10} \approx 10^h 54'33''$, $t_{11} = 12^h$.

2°) A 10 h, l'angle aigu formé par les deux aiguilles mesure 60°. On cherche donc θ, tel que $60 - \frac{\theta}{12} = \theta$ soit $\theta = \frac{720}{13}$ degré soit un temps de $\frac{2}{13}$ h , soit environ $9'14''$. Dans cette configuration il est environ $10^h 9'14''$

EXERCICE 3. Pavage



Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit (carré C_1).

Si ce carré C_1 a pour côté **c**, le carré C_2 a pour côté **c + 1**, et le carré C_3 a pour côté **c + 2**. Le carré C_4 a pour côté **c + 3**.

(A chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté **1**)

Ceci permet de déduire que le carré C_5 pour côté **4**. Quant au carré C_6 il a pour côté **2c + 1**. On obtient qu'une des dimensions du rectangle initial est : (**2c + 1**) + (**c + 1**) + (**c + 2**) = **4c + 4**.

Le carré C_7 a pour côté **c + 3 + 4** = **c + 7**. Donc l'autre dimension du rectangle initial est : (**c + 7**) + (**c + 3**) + (**c + 2**) = **3c +12**.

Le dernier carré C_8 a pour côté **c + 7 + 4 =c + 11**.

Finalement deux côtés opposés du rectangle ont pour dimensions :

4c + 4 et (**c + 7**) + (**c + 11**) = **2c + 18**

Les deux côtés étant de même longueur, on a **4c + 4** = **2c + 18** ce qui donne **c** = **7**.

En conclusion, le rectangle initial a pour dimensions **32u et 33u**.

EXERCICE 4. Partages

1°) Les triangles *BAE*, *BEF*, *BFC* d'une part et les triangles *DAE*, *DEF*, *DFC* d'autre part ont même hauteur et des bases de même mesure, ils ont donc la même aire. Les quadrilatères cités ont donc également la même aire.

2°) Puisque (*HF*) et (*BD*) sont parallèles, *F* et *H* sont équidistants de la droite (*BD*). Les triangles *BFH* et *DFH* , qui ont en commun le côté [*HF*] ont donc la même aire. L'aire du quadrilatère *DCBF* est la somme des aires des triangles *DFC, FCH* et *FHB* ; c'est donc aussi la somme des aires des triangles *DFC, FCH* et *DFH*.

Le quadrilatère *DCBF* et le triangle *DHC* ont la même aire égale d'après la question 1°) au tiers de l'aire de *ABCD*. Le même raisonnement permet d'affirmer que l'aire du quadrilatère *ADEB* est la même que celle du triangle *DGA* et donc de conclure.

<u>Remarque</u> *:La question posée se résout bien dans le contexte de la figure donnée en annexe, le raisonnement général est plus délicat car il existe des configurations pour lesquelles les points G et H n'appartiennent plus aux segments [AB] et [BC], il faut alors faire la construction avec la seconde diagonale du quadrilatère. Le cas où le quadrilatère est un parallélogramme est un cas particulier intéressant.*