OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

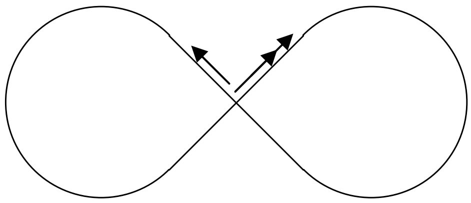
SESSION 2005

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1. Le lièvre et la tortue.



La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.

Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).
Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour) hormis le départ, le lièvre abandonne.
Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

EXERCICE 2.

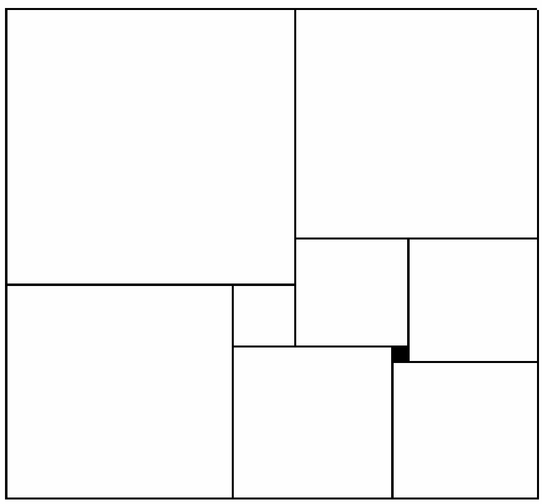
Lorsqu'on observe les deux aiguilles d'une horloge, on constate qu'elles occupent au fil des heures, l'une par rapport à l'autre, des positions particulières. On se propose, dans cet exercice, d'étudier deux exemples de telles situations.

1) A minuit (0 heure) les deux aiguilles sont superposées. A quelle heure cette superposition se produira-t-elle de nouveau :
   a) Pour la première fois ?
   b) Pour la seconde fois ?
   c) Pour la $k^{\text{ème}}$ fois. (k désigne un entier compris entre 1 et 11).

   Les réponses aux questions a) et b) seront arrondies à la seconde.
2) Lorsqu'il est environ 10h 10' et que la bissectrice de l'angle formé par les deux aiguilles passe par la graduation « 12 », quelle heure est-il ? (La réponse sera arrondie à la seconde).

EXERCICE 3.

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés.
Le carré noir a pour côté une unité.
Quelles sont les dimensions du rectangle ?



EXERCICE 4.

A la question : « comment diviser un quadrilatère $ABCD$ en trois parties de même aire, en traçant deux droites passant par D ? », Samuel Marolois (1616) propose la réponse suivante :

« On place E au tiers de la diagonale $[AC]$ et F aux deux tiers de cette même diagonale. La parallèle à (BD) passant par E coupe $[AB]$ en G et la parallèle à $[BD]$ passant par F coupe $[BC]$ en H. Les deux droites cherchées sont (DG) et (DH) ».

On se propose de vérifier cette affirmation dans le contexte de la figure ci-dessous

1) Démontrer que les quadrilatères $DABE$, $DEBF$ et $DFBC$ ont la même aire.
2) En déduire que DAG, DHC et $DGBH$ sont des polygones de même aire.