OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2006 Eléments de correction

EXERCICE 1 : « *la spirale* ».

Quelques notations et calculs préliminaires.

Notations. Si n est un entier naturel strictement positif, appelons A_n, A'_n, B_n, C_n, D_n, E_n les points du plan de coordonnées : $A_n(n,0)$, $A'_n(-n,0)$, $B_n(n,n)$, $C_n(-n,n)$, $D_n(-n+1,-n)$, $E_n(n,-n)$. La spirale est donc la ligne brisée $OD_1E_1B_1C_1D_2...D_nE_nB_nC_n...$ Notons que A_n est le milieu du segment $[E_nB_n]$ et que A'_n appartient au segment $[C_nD_{n+1}]$

Calculs préliminaires. On remarque que $l(A_1)=3, l(A_2)=3+11=3+(3+8), l(A_3)=3+(3+8)+(3+2\times 8)$ ce qui permet d'imaginer que $l(A_n)=3n+8(1+2+...+(n-1))=3n+8\dfrac{n(n-1)}{2}=4n^2-n$ lorsque n est un entier naturel non nul. On peut s'assurer que cette formule est encore vraie au rang suivant car $l(A_{n+1})=l(A_n)+A_nB_n+B_nC_n+C_nD_{n+1}+D_{n+1}E_{n+1}+E_{n+1}A_{n+1}=l(A_n)+n+2n+2n+1+2n+2+n+1$. On en déduit que $l(A_{n+1})=l(A_n)+8n+4=4(n+1)^2-(n+1)$. On montre de même que $l(A'_n)=4n^2+3n$. Bien entendu, la récurrence n'est pas exigée en première, une démarche empirique sera acceptée.

1) Si $OA = 5$, $A=A_5$ ou $A=A'_5$ donc $l(A)=95$ ou $l(A)=115$.

2) B appartient au segment $[B_{2006}C_{2006}]$ donc $l(B)=l(A_{2006})+A_{2006}B_{2006}+B_{2006}B$ et

$$l(B)=4(2006)^2-2006+2006+1=4(2006)^2+1=16096145$$

3) $l(C)$=2006. recherchons un entier n tel que $l(A_n)$ soit assez voisin de 2006. Résolvons donc l'équation

$4n^2-n-2096=0$ dont la solution positive est $\dfrac{1+\sqrt{32097}}{8}\approx 22{,}5$. $l(A_{23})=2093$, $l(A_{22})=1914$ et $l(A'_{22})=2002$. Le point C a donc pour coordonnées $(-22,-4)$.

4) Soit $M(n,p)$ un point à coordonnées entières du plan distinct de O

a) Supposons $n\geq 0$.

(1) Si $|p|\leq n$ alors $M\in[E_nB_n]$.

(2) Si $|p|>n$ alors $M\in[C_pB_p]$ si $p>0$ et $M\in[D_{-p}E_{-p}]$ si $p<0$..

b) Supposons $n<0$.

(1) Si $|p|<-n+1$ alors $M\in[C_{-n}D_{-n+1}]$.

(2) Si $|p|\geq -n+1$ alors $M\in[C_pB_p]$ si $p>0$ et $M\in[D_{-p}E_{-p}]$ si $p<0$.

Dans tous les cas, M appartient à la spirale.

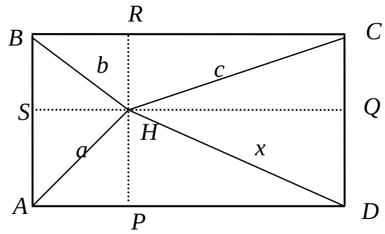
EXERCICE 2 : « *sur le toit* »

Notons A, B, C, D les sommets du rectangle, M le sommet du mât, H son projeté orthogonal sur le plan du rectangle, P Q, R, S les projetés orthogonaux de H sur les côtés du rectangle, posons $a = AH$, $b = BH$, $c = CH$, $x = DH$.

D'après le théorème de Pythagore, nous avons

d'une part : $a^2-b^2=\left(HP^2+AP^2\right)-\left(HR^2+BR^2\right)=HP^2-HR^2$

et d'autre part : $x^2-c^2=\left(HP^2+DP^2\right)-\left(HR^2+CR^2\right)=HP^2-HR^2$



On en déduit : $x^2-c^2=a^2-b^2$.

Comme, toujours par Pythagore :

$MD^2-MC^2=\left(x^2+MH^2\right)-\left(c^2+MH^2\right)=x^2-c^2$ et

$MA^2-MB^2=\left(a^2+MH^2\right)-\left(b^2+MH^2\right)=a^2-b^2$ il en résulte que :

$$MD^2=MA^2+MC^2-MB^2$$

Application numérique : avec $MA = 7$, $MB = 1$, $MC = 4$, cela donne : $\boxed{MD = 8 \text{ mètres}}$.

EXERCICE 3 : « *les licornes* »

1°) a) Supposons $b=r$ par exemple, alors b rencontres « br » conduiront à l'ensemble $\{0,0,v+b+r\}$.
On raisonne de même pour les autres cas.
b) On suppose $v>0$ et $r = b+3$. Après une rencontre « rv » la population sera $\{b+2, b+2, v-1\}$, il suffit alors d'appliquer le résultat a).
c) On suppose $v>k>0$ et $r = b+3k$. Au bout de k rencontres « rv », la population sera $\{b+2k, b+2k, v-k\}$ d'où le résultat en appliquant encore a).

2°) Si $P=\{1,2,3\}$ l'arbre suivant montre toutes les évolutions possibles de la population et cette évolution est cyclique :

$$\{1,2,3\} \to \begin{cases} \{0,1,5\} \to \{2,0,4 \to \{1,2,3\}\} \\ \{0,4,2\} \to \{2,3,1\} \\ \{3,1,2\} \end{cases}$$

La population ne peut donc pas devenir unicolore.

3°) Supposons que n rencontres aient eu lieu et posons $n = n_{br} + n_{bv} + n_{rv}$ où n_{br}, n_{bv}, n_{rv} sont des entiers positifs ou nuls et désignent respectivement les nombres de rencontres entre des licornes bleues et rouges , bleues et vertes, rouges et vertes.

Compte tenu de la règle des couleurs, le nombre de licornes bleues sera modifié de $2n_{rv} - n_{br} - n_{bv}$, le nombre de licornes rouges sera modifié de $2n_{bv} - n_{br} - n_{rv}$, le nombre de licornes vertes sera modifié de $2n_{br} - n_{rv} - n_{bv}$, comme $n = n_{br} + n_{bv} + n_{rv}$, la population de licornes, à l'issue de ces n rencontres sera $P' = \{b - n + 3n_{rv}, r - n + 3n_{bv}, v - n + 3n_{br}\}$.

La population sera donc unicolore au bout des n rencontres si et seulement si $b-r$ ou $b-v$ ou $r-v$ est multiple de

EXERCICE 4 : « *les cylindres en papier* »

1) Le premier cylindre a pour hauteur 29,7 cm et pour rayon de base $\frac{21}{2\pi}$ cm, son volume V_1 est donc $V_1 = \frac{21^2}{4\pi} \times 29{,}7 \approx 1042\,\text{cm}^3$. Le second cylindre a pour hauteur 21cm et pour rayon de base $\frac{29{,}7}{2\pi}$cm, son volume V_2 est donc : $V_2 = \frac{29{,}7^2}{4\pi} \times 21 \approx 1474 cm^3$. Les deux cylindres n'ont pas le même volume.

2) Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions, on dispose donc d'un parallélogramme dont l'aire est $A = 21(29{,}7 - x) = h\sqrt{21^2 + x^2}$

Le premier cylindre a pour hauteur 21cm et pour rayon de base $\frac{(29{,}7-x)}{2\pi}$ .Son volume est donc

$$V_1(x) = \frac{(29{,}7 - x)^2}{4\pi} \times 21\,\text{cm}^3$$

Le second cylindre a pour hauteur h et pour rayon de base $\frac{\sqrt{21^2 + x^2}}{2\pi}$. Son volume est donc

$$V_2(x) = \frac{(21^2 + x^2)}{4\pi} \times \frac{21 \times (29{,}7 - x)}{\sqrt{21^2 + x^2}} = \frac{21 \times (29{,}7 - x) \times \sqrt{(21^2 + x^2)}}{4\pi}\text{cm}^3$$

$V_1(x) = V_2(x)$ si et seulement si $\sqrt{21^2 - x^2} = (29{,}7 - x)$ soit $x = \frac{29{,}7^2 - 21^2}{59{,}4} = \frac{4901}{660} \approx 7{,}42 \approx \frac{29{,}7}{4}$.