OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2006 ***Eléments de correction***

EXERCICE 1 : « *la spirale* ».

Quelques notations et calculs préliminaires.

Notations. Si n est un entier naturel strictement positif, appelons A_n, A'_n, B_n, C_n, D_n, E_n les points du plan de coordonnées : $A_n(n,0)$, $A'_n(-n,0)$, $B_n(n,n)$, $C_n(-n,n)$, $D_n(-n+1,-n)$, $E_n(n,-n)$. La spirale est donc la ligne brisée $OD_1E_1B_1C_1D_2...D_nE_nB_nC_n...$ Notons que A_n est le milieu du segment $[E_nB_n]$ et que A'_n appartient au segment $[C_nD_{n+1}]$

Calculs préliminaires. On remarque que $l(A_1)=3$, $l(A_2)=3+11=3+(3+8)$, $l(A_3)=3+(3+8)+(3+2\times 8)$ ce qui permet d'imaginer que $l(A_n)=3n+8(1+2+...+(n-1))=3n+8\dfrac{n(n-1)}{2}=4n^2-n$ lorsque n est un entier naturel non nul. On peut s'assurer que cette formule est encore vraie au rang suivant car $l(A_{n+1})=l(A_n)+A_nB_n+B_nC_n+C_nD_{n+1}+D_{n+1}E_{n+1}+E_{n+1}A_{n+1}=l(A_n)+n+2n+2n+1+2n+2+n+1$. On en déduit que $l(A_{n+1})=l(A_n)+8n+4=4(n+1)^2-(n+1)$. On montre de même que $l(A'_n)=4n^2+3n$. Bien entendu, la récurrence n'est pas exigée en première, une démarche empirique sera acceptée.

1) Si $OA = 5$, $A=A_5$ ou $A=A'_5$ donc $l(A)=95$ ou $l(A)=115$.

2) B appartient au segment $[B_{2006}C_{2006}]$ donc $l(B)=l(A_{2006})+A_{2006}B_{2006}+B_{2006}B$ et

$$l(B)=4(2006)^2-2006+2006+1=4(2006)^2+1=16096145$$

3) $l(C)$=2006. recherchons un entier n tel que $l(A_n)$ soit assez voisin de 2006. Résolvons donc l'équation

$4n^2-n-2096=0$ dont la solution positive est $\dfrac{1+\sqrt{32097}}{8}\approx 22{,}5$. $l(A_{23})=2093$, $l(A_{22})=1914$ et $l(A'_{22})=2002$. Le point C a donc pour coordonnées $(-22,-4)$.

4) Soit $M(n,p)$ un point à coordonnées entières du plan distinct de O

a) Supposons $n\geq 0$.

(1) Si $|p|\leq n$ alors $M\in[E_nB_n]$.

(2) Si $|p|>n$ alors $M\in[C_pB_p]$ si $p>0$ et $M\in[D_{-p}E_{-p}]$ si $p<0$..

b) Supposons $n<0$.

(1) Si $|p|<-n+1$ alors $M\in[C_{-n}D_{-n+1}]$.

(2) Si $|p|\geq -n+1$ alors $M\in[C_pB_p]$ si $p>0$ et $M\in[D_{-p}E_{-p}]$ si $p<0$.

Dans tous les cas, M appartient à la spirale.