

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2006 Eléments de correction

EXERCICE 3 : « les licornes »

- 1°) a) Supposons $b=r$ par exemple, alors b rencontres « br » conduiront à l'ensemble $\{0,0,v+b+r\}$.
On raisonne de même pour les autres cas.
b) On suppose $v>0$ et $r = b+3$. Après une rencontre « rv » la population sera $\{b+2, b+2, v-1\}$, il suffit alors d'appliquer le résultat a).
c) On suppose $v>k>0$ et $r = b+3k$. Au bout de k rencontres « rv », la population sera $\{b+2k, b+2k, v-k\}$ d'où le résultat en appliquant encore a).

2°) Si $P=\{1,2,3\}$ l'arbre suivant montre toutes les évolutions possibles de la population et cette évolution est cyclique :

$$\{1,2,3\} \rightarrow \begin{cases} \{0,1,5\} \rightarrow \{2,0,4 \rightarrow \{1,2,3\}\} \\ \{0,4,2\} \rightarrow \{2,3,1\} \\ \{3,1,2\} \end{cases}$$

La population ne peut donc pas devenir unicolore.

3°) Supposons que n rencontres aient eu lieu et posons $n = n_{br} + n_{bv} + n_{rv}$ où n_{br}, n_{bv}, n_{rv} sont des entiers positifs ou nuls et désignent respectivement les nombres de rencontres entre des licornes bleues et rouges, bleues et vertes, rouges et vertes.

Compte tenu de la règle des couleurs, le nombre de licornes bleues sera modifié de $2n_{rv} - n_{br} - n_{bv}$, le nombre de licornes rouges sera modifié de $2n_{bv} - n_{br} - n_{rv}$, le nombre de licornes vertes sera modifié de $2n_{br} - n_{rv} - n_{bv}$, comme $n = n_{br} + n_{bv} + n_{rv}$, la population de licornes, à l'issue de ces n rencontres sera $P' = \{b - n + 3n_{rv}, r - n + 3n_{bv}, v - n + 3n_{br}\}$.

La population sera donc unicolore au bout des n rencontres si et seulement si $b-r$ ou $b-v$ ou $r-v$ est multiple de