OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2006

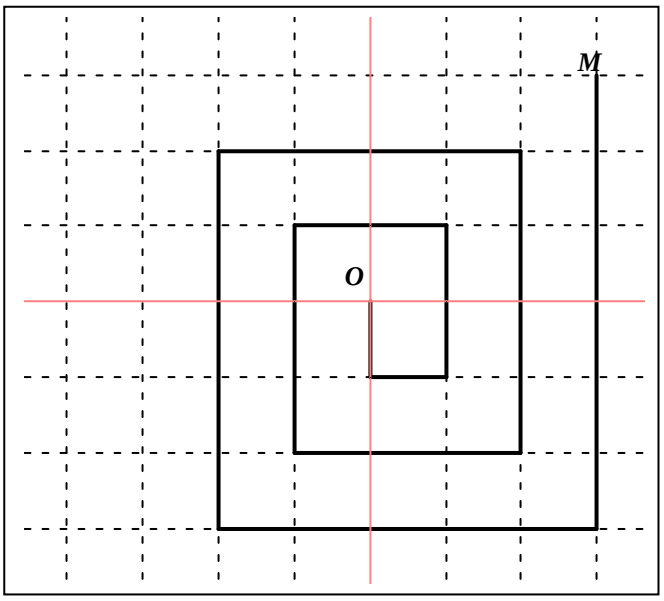
CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 : « *la spirale* ».

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « *spirale* » qui « *tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre* », conformément au dessin ci-dessous.



Pour tout point M à coordonnées entières, on note $l(M)$ la longueur de la portion de « *spirale* » qui va du point O jusqu'au point M.

1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$. Déterminer les valeurs possibles de $l(A)$.

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006). Déterminer $l(B)$.

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que $l(C)=2006$.

4) La « *spirale* » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant : pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+...+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.