

# OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2006

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

*Les quatre exercices sont indépendants.*

*Les calculatrices sont autorisées.*

## EXERCICE 3 : « les licornes »

Dans l'île Mystérieuse, vivent depuis toujours  $b$  licornes bleues,  $r$  licornes rouges et  $v$  licornes vertes. Un mal étrange vient frapper l'île : dès que deux licornes de couleurs différentes se rencontrent, elles changent toutes les deux de couleur et prennent la couleur restante. Le but de ce problème est d'étudier la possibilité que, sur cette île, les licornes deviennent unicolores ?

1) Montrer qu'une telle issue est possible dans chacun des cas suivants :

- a)  $b=r$  ou  $b=v$  ou  $r=v$ .
- b)  $r=b+3$  et  $v>0$ .
- c)  $r=b+3k$  où  $k$  est un entier naturel inférieur à  $v$ .

2) Dans cette question, on suppose que :  $b=1$ ,  $r=2$ ,  $v=3$ . Une telle population peut-elle devenir unicolore ?

3) On suppose que  $n$  rencontres ont eu lieu depuis le début du mal, à quelle condition nécessaire et suffisante sur  $b$ ,  $v$ ,  $r$ , la population de licornes peut-elle devenir unicolore ?