OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2006

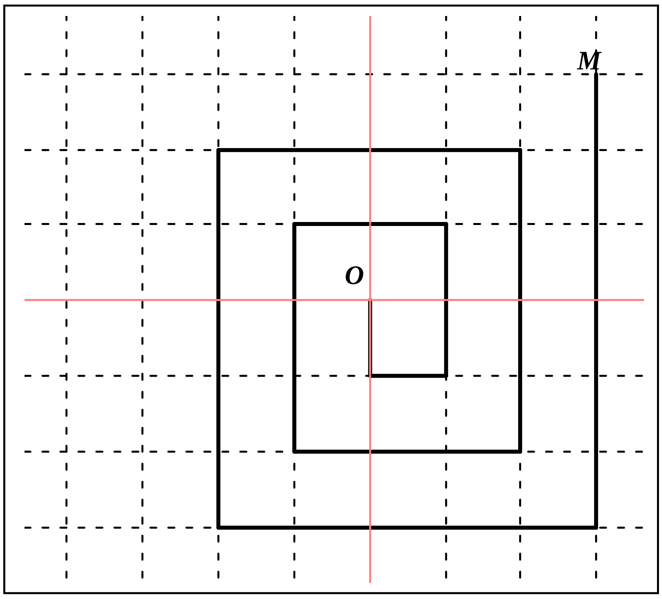
CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 : « *la spirale* ».

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « *spirale* » qui « *tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre* », conformément au dessin ci-dessous.



Pour tout point M à coordonnées entières, on note $l(M)$ la longueur de la portion de « *spirale* » qui va du point O jusqu'au point M.

1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$. Déterminer les valeurs possibles de $l(A)$.

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006). Déterminer $l(B)$.

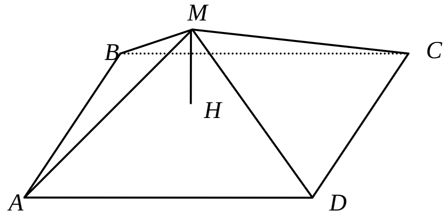
3) Déterminer les coordonnées du point C tel que $l(C)$=2006.

4) La « *spirale* » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant : pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+...+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 2 : « *sur le toit* »

Un radio amateur place un mât d'antenne sur le toit rectangulaire de son garage à l'endroit où il fournit la meilleure réception. (On suppose que le mât est orthogonal au plan du toit). Il fixe alors ce mât par des câbles rectilignes en fil de fer qui vont de la cime jusqu'aux quatre coins du toit selon le schéma ci contre. Sur ces quatre câbles, deux câbles non consécutifs mesurent 7 mètres et 4 mètres, un troisième mesure 1 mètre .



Quelle est la longueur du dernier câble ?

EXERCICE 3 : « *les licornes* »

Dans l'Ile Mystérieuse, vivent depuis toujours b licornes bleues, r licornes rouges et v licornes vertes. Un mal étrange vient frapper l'île : dès que deux licornes de couleurs différentes se rencontrent, elles changent toutes les deux de couleur et prennent la couleur restante. Le but de ce problème est d'étudier la possibilité que, sur cette île, les licornes deviennent unicolores ?

1) Montrer qu'une telle issue est possible dans chacun des cas suivants :
   a) $b=r$ ou $b=v$ ou $r=v$.
   b) $r=b+3$ et $v>0$.
   c) $r=b+3k$ où k est un entier naturel inférieur à v.

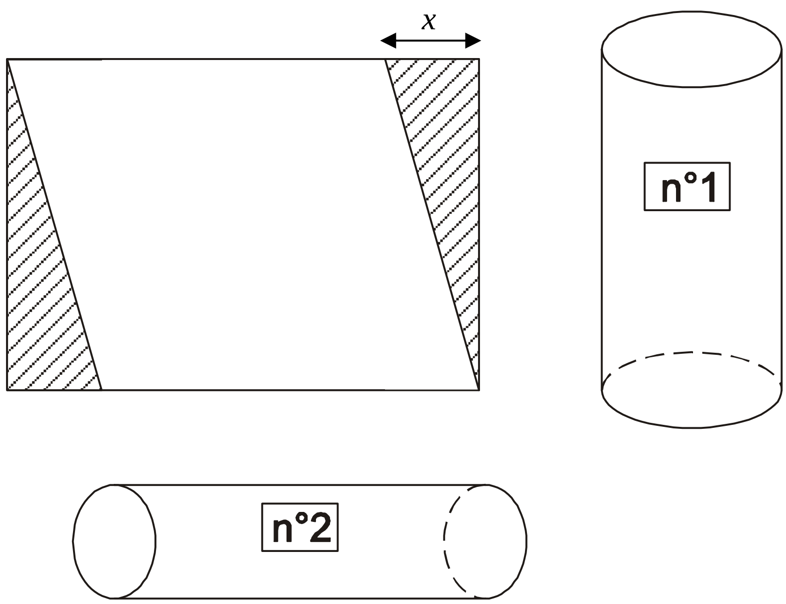
2) Dans cette question, on suppose que : $b=1$, $r=2$, $v=3$. Une telle population peut-elle devenir unicolore ?

3) On suppose que n rencontres ont eu lieu depuis le début du mal, à quelle condition nécessaire et suffisante sur b, v, r, la population de licornes peut-elle devenir unicolore ?

EXERCICE 4 : « *les cylindres en papier* »

1) On prend une feuille de papier rectangulaire de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
   Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2) Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.