OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2007

CORRIGE

EXERCICE 1 : « ***un problème de tas*** »

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut. Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

1) En partant de la configuration (7) on obtient successivement :

Manipulations		1	2	**3**	4	5	6	**7**
Répartitions	(7)	(6,1)	(5,2)	**(4,1,2)**	(3,1,3)	(2,2,3)	(1,1,2,3)	**(4,2,1)**

On déduit du tableau que la répartition (4,2,1) apparaîtra après 3+4n manipulations c'est-à-dire après 3, 7, 11, 15,… manipulations. Puisque $2007 = 3 + 4 \times 501$, la répartition (4,2,1) sera obtenue au bout de 2007 manipulations. Il en est de même pour les configurations (3,1,3), (2,2,3), (1,1,2,3)

La résolution des deux questions suivantes est facilitée par une étude exhaustive des cas possibles :

Nombre initial de tas	Répartitions	Evolution après					
		1 manip	2 manip	3 manip		2007 manip	nb de répartitions initiales
7	(1,1,1,1,1,1,1)	(7)	(6,1)	(5,2)		(2,1,1,3)	1
6	(2,1,1,1,1,1)	(6,1)	(5,2)	(4,2,1)		(4,2,1)	1
5	(3,1,1,1,1)	(5,2)	(4,2,1)	(3,1,3)		(3,1,3)	2
	(2,2,1,1,1)	(1,1,5)	(4,3)	(3,2,2)		(3,2,2)	
4	(4,1,1,1)	(4,3)	(3,2,2)	(2,1,1,3)		(2,1,1,3)	3
	(3,2,1,1)	(4,2,1)	(3,1,3)	(2,2,3)		(2,2,3)	
	(2,2,2,1)	(1,1,1,4)	(4,3)	(3,2,2)		(3,2,2)	
3	(5,1,1)	(4,3)	(3,2,2)	(2,1,1,3)		(2,1,1,3)	4
	(4,2,1)	(3,1,3)	(2,2,3)	(2,1,1,3)		(2,1,1,3)	
	(3,3,1)	(2,2,3)	(2,1,1,3)	(4,2,1)		(4,2,1)	
	(3,2,2)	(2,1,1,3)	(4,2,1)	(3,1,3)		(3,1,3)	
2	(6,1)	(5,2)	(4,2,1)	(3,1,3)		(3,1,3)	3
	(5,2)	(4,2,1)	(3,1,3)	(2,2,3)		(2,2,3)	
	(4,3)	(3,2,2)	(2,1,1,3)	(4,2,1)		(4,2,1)	
1	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,2,1)		(4,2,1)	1

2) La répartition (4,1,2) est donc obtenue au bout de 2007 manipulations si la répartition initiale est :

$\boxed{(2,1,1,1,1,1),\ (3,3,1),\ (4,3),\ (7)}$

3) Virginie a vu la configuration (3,3,1).

EXERCICE 2 : « ***les pesées frauduleuses*** »

Vers l'an 250 de notre ère, vivait à Alexandrie le mathématicien Diophante. Celui-ci avait remarqué que certains marchands d'orge truquaient leur balance à plateaux en raccourcissant l'un des fléaux : ils trompaient les clients sur la quantité en plaçant les masses du côté du fléau le plus court. (En effet, à l'équilibre, le produit de la masse par la longueur du fléau, exprimés dans la même unité, est le même de chaque côté.)

Pour punir les marchands malhonnêtes, Diophante leur proposait de mettre alternativement les masses dans un plateau, puis dans l'autre : un client serait lésé, le suivant avantagé … et les fraudeurs étaient heureux de s'en tirer à si bon compte.

Soit L et l les longueurs des deux bras de fléau, exprimées dans la même unité. On suppose que $l \le L$
Une masse de 1 kg placée du côté du fléau le plus long est équilibrée par une masse M (en kg) vérifiant, d'après la règle d'équilibre : $1 \times L = M \times l$, d'où : $M = \frac{L}{l}$. De même, une masse de 1 kg placée du côté du fléau le plus court est équilibrée par une masse m qui s'exprime en kg par : $m = \frac{l}{L}$. Lorsque le marchand réalise n pesées de 1kg de chaque côté, il est censé vendre $2n$ kg d'orge, alors qu'il en vend en réalité $n \times \frac{L}{l} + n \times \frac{l}{L}$ kilogrammes.

1) Si un fléau est raccourci de 10 % de sa longueur, on a $l = 0{,}9 \times L$ et le marchand a vendu au bout de 180 pesées : $90 \times \left(\frac{1}{0{,}9} + 0{,}9 \right)$ kg, soit 181 kg, au lieu des 180 kg prévus. Il a donc perdu 1 kg d'orge.

2) Si un fléau est raccourci de 20 % de sa longueur, on a $l = 0{,}8 \times L$ et le marchand a vendu au bout de 160 pesées : $80 \times \left(\frac{1}{0{,}8} + 0{,}8 \right)$ kg, soit 164 kg, au lieu des 160 kg prévus. Il a donc perdu 4 kg d'orge.

3) Posons $t = \frac{L}{l}$. Comme $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \ge 0$, il en résulte que $t + \frac{1}{t} \ge 2$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque t =1. Au bout de $2n$ pesées, la quantité vendue est $n \times \left(t + \frac{1}{t} \right)$, et cette quantité est supérieure à la quantité prévue (qui est égale à $2n$) dès que t>1, c'est-à-dire dès que $L > l$.

EXERCICE 3 : « *des trapèzes de même aire* »

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1) Question préliminaire :

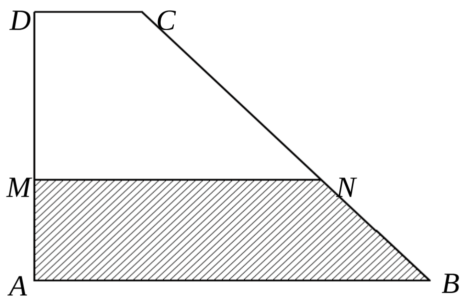
$m^2 - p^2 = 8$ si et seulement si $(m-p)(m+p) = 8$. m et p étant des entiers naturels, $m - p < m + p$ (m,p) est donc solutions de l'un des deux systèmes $\begin{cases} m - p = 1 \\ m + p = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m - p = 2 \\ m + p = 4 \end{cases}$ ce qui donne une solution unique (3,1).

2) *On considère les trapèzes rectangles $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :*

- $\widehat{ABC}$ *= 45°.*
- *les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et $AD > 2$.*

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.

Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

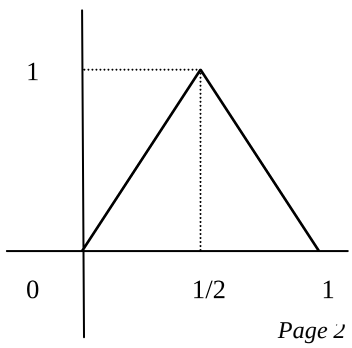


Posons $MN = x$ et $DM = y$ donc $x>y$. L'aire du trapèze $ABNM$ est $2x + 2$, l'aire du trapèze $MNCD$ est $\frac{(x + x - y) \times y}{2} = \frac{y(2x - y)}{2}$. On cherche donc x et y afin que $4x + 4 = 2xy - y^2$ soit $y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$ qui s'écrit encore : $(x-y)^2 + (x-2)^2 = 8$. Il vient x=5 et y=4 donc AB=7, AD=6, CD=1.

EXERCICE 4 : « *périodes* »

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 1]

par : $\begin{cases} f(x) = 2x \text{ si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x \text{ si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$



1) *Représenter graphiquement la fonction f et montrer que si* $0 \le x \le 1$, *alors* $0 \le f(x) \le 1$.

1°) La représentation graphique est celle d'une fonction affine par intervalle. Lorsque $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $0 \le 2x \le 1$ et lorsque $\frac{1}{2} < x \le 1$, $0 \le 2-2x \le 1$ donc lorsque x varie dans l'intervalle [0,1], il en est de même pour $f(x)$ ce qui assure la possibilité de fabrication de la suite de nombres.

2°) Etude des cas particuliers

a) Si $x_0 = \frac{1}{48}$, on obtient : $x_1 = \frac{1}{24}, x_2 = 2x_1 = \frac{1}{12}, x_3 = \frac{1}{6}, x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{2}{3}, x_6 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, x_7 = \frac{2}{3}, ...$ d'où le résultat.

b) Si $x_0 = \frac{2}{11}$, on obtient : $x_1 = \frac{4}{11}, x_2 = 2x_1 = \frac{8}{11}, x_3 = 2 - \frac{16}{11} = \frac{6}{11}, x_4 = 2 - \frac{12}{11} = \frac{10}{11}, x_5 = 2 - \frac{20}{11} = \frac{2}{11}$

On constate donc que $x_5 = x_0 = x_{10} = ...x_{5k}$. Or 2007=2005+2 et d'après ce qui précède, $x_{2005} = x_0$. On en déduit finalement $x_{2007} = x_2 = \frac{8}{11}$.

c) Cherchons $x_0 < \frac{1}{2}$ tel que $x_7 = x_0$. On peut par exemple adopter le schéma suivant :

$x_1 = 2x_0, x_2 = 4x_0, x_3 = 8x_0, x_4 = 16x_0, x_5 = 32x_0, x_6 = 64x_0$ et $x_7 = 2 - 128x_0 = x_0$ donc $x_0 = \frac{2}{129}$ convient.

Procédons de même si l'on veut que $x_p = x_0$, on trouvera $x_0 = \frac{2}{1+2^p}$.

Remarque : d'autres nombres répondent à la question comme $x_0 = \frac{2}{2^p - 1}$

3°) Posons $x_0 = \frac{p}{q}$ où $p < q$. Il existe, dans l'intervalle [0,1], q fractions du type $\frac{k}{q}$ avec k=1,2,…q. D'autre part, si x est un rationnel, $f(x)$ aussi et a le même dénominateur que x. $f(x)$ ne peut donc prendre qu'au plus q valeurs et la suite est donc nécessairement périodique.