

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2007

CORRIGE

EXERCICE 1 : « un problème de tas »

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut. Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

1) En partant de la configuration (7) on obtient successivement :

Manipulations		1	2	3	4	5	6	7
Répartitions	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,1,2)	(3,1,3)	(2,2,3)	(1,1,2,3)	(4,2,1)

On déduit du tableau que la répartition (4,2,1) apparaîtra après $3+4n$ manipulations c'est-à-dire après 3, 7, 11, 15, ... manipulations. Puisque $2007 = 3 + 4 \times 501$, la répartition (4,2,1) sera obtenue au bout de 2007 manipulations. Il en est de même pour les configurations (3,1,3), (2,2,3), (1,1,2,3)

La résolution des deux questions suivantes est facilitée par une étude exhaustive des cas possibles :

Nombre initial de tas	Répartitions	Evolution après					
		1 manip	2 manip	3 manip		2007 manip	nb de répartitions initiales
7	(1,1,1,1,1,1,1)	(7)	(6,1)	(5,2)		(2,1,1,3)	1
6	(2,1,1,1,1,1)	(6,1)	(5,2)	(4,2,1)		(4,2,1)	1
5	(3,1,1,1,1)	(5,2)	(4,2,1)	(3,1,3)		(3,1,3)	2
	(2,2,1,1,1)	(1,1,5)	(4,3)	(3,2,2)		(3,2,2)	
4	(4,1,1,1)	(4,3)	(3,2,2)	(2,1,1,3)		(2,1,1,3)	3
	(3,2,1,1)	(4,2,1)	(3,1,3)	(2,2,3)		(2,2,3)	
	(2,2,2,1)	(1,1,1,4)	(4,3)	(3,2,2)		(3,2,2)	
3	(5,1,1)	(4,3)	(3,2,2)	(2,1,1,3)		(2,1,1,3)	4
	(4,2,1)	(3,1,3)	(2,2,3)	(2,1,1,3)		(2,1,1,3)	
	(3,3,1)	(2,2,3)	(2,1,1,3)	(4,2,1)		(4,2,1)	
	(3,2,2)	(2,1,1,3)	(4,2,1)	(3,1,3)		(3,1,3)	
2	(6,1)	(5,2)	(4,2,1)	(3,1,3)		(3,1,3)	3
	(5,2)	(4,2,1)	(3,1,3)	(2,2,3)		(2,2,3)	
	(4,3)	(3,2,2)	(2,1,1,3)	(4,2,1)		(4,2,1)	
1	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,2,1)		(4,2,1)	1

2) La répartition (4,1,2) est donc obtenue au bout de 2007 manipulations si la répartition initiale est :

(2,1,1,1,1,1), (3,3,1), (4,3), (7)

3) Virginie a vu la configuration (3,3,1).