OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2007

CORRIGE

EXERCICE 2 : « *les pesées frauduleuses* »

Vers l'an 250 de notre ère, vivait à Alexandrie le mathématicien Diophante. Celui-ci avait remarqué que certains marchands d'orge truquaient leur balance à plateaux en raccourcissant l'un des fléaux : ils trompaient les clients sur la quantité en plaçant les masses du côté du fléau le plus court. (En effet, à l'équilibre, le produit de la masse par la longueur du fléau, exprimés dans la même unité, est le même de chaque côté.)
Pour punir les marchands malhonnêtes, Diophante leur proposait de mettre alternativement les masses dans un plateau, puis dans l'autre : un client serait lésé, le suivant avantagé … et les fraudeurs étaient heureux de s'en tirer à si bon compte.

Soit L et l les longueurs des deux bras de fléau, exprimées dans la même unité. On suppose que $l \le L$
Une masse de 1 kg placée du côté du fléau le plus long est équilibrée par une masse M (en kg) vérifiant, d'après la règle d'équilibre : $1 \times L = M \times l$, d'où : $M = \frac{L}{l}$. De même, une masse de 1 kg placée du côté du fléau le plus court est équilibrée par une masse m qui s'exprime en kg par : $m = \frac{l}{L}$. Lorsque le marchand réalise n pesées de 1kg de chaque côté, il est censé vendre 2n kg d'orge, alors qu'il en vend en réalité $n \times \frac{L}{l} + n \times \frac{l}{L}$ kilogrammes.

1) Si un fléau est raccourci de 10 % de sa longueur, on a $l = 0{,}9 \times L$ et le marchand a vendu au bout de 180 pesées : $90 \times \left(\frac{1}{0{,}9} + 0{,}9 \right)$ kg, soit 181 kg, au lieu des 180 kg prévus. Il a donc perdu 1 kg d'orge.
2) Si un fléau est raccourci de 20 % de sa longueur, on a $l = 0{,}8 \times L$ et le marchand a vendu au bout de 160 pesées : $80 \times \left(\frac{1}{0{,}8} + 0{,}8 \right)$ kg, soit 164 kg, au lieu des 160 kg prévus. Il a donc perdu 4 kg d'orge.
3) Posons $t = \frac{L}{l}$. Comme $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \ge 0$, il en résulte que $t + \frac{1}{t} \ge 2$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque t =1. Au bout de 2n pesées, la quantité vendue est $n \times \left(t + \frac{1}{t} \right)$, et cette quantité est supérieure à la quantité prévue (qui est égale à 2n) dès que t>1, c'est-à-dire dès que $L > l$.

et la suite est donc nécessairement périodique.